Квант

5
МАЙ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

На первой странице обложки изображены универсальные, экваториальные, портативные солнечные часы. О том, как ими пользоваться, рассказано в заметке В. Березина «Солнечные часы» **(см. стр. 35).**

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.* Главный художник *А. И. Климанов*
Художественный редактор *О. Н. Яковлева* Корректор *В. П. Сорокина*
Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В71, Ленинский проспект, 15, тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 16/II 1972 г. Подписано в печать 4/IV 1972 г. Бумага $70\times100^1/_{16}$
Физ. печ. л. 4. Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,04. Тираж 342 690 экз. Т-06134 Цена 30 коп. Зак. 165
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР г. Чехов, Московской области

РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ

ОСНОВАН В 1970 ГОДУ

КВАНТ

5
МАЙ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

2 Искусственные ядра — *В. И. Кузнецов*
8 Машина Поста — *Н. Кудрявская, И. Ломакина, С. Приз*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

14 О числе e и n! — *Л. Г. Лиманов*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

20 Исследование волн на поверхности воды — *К. Стонг*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

25 Задачи **М141-М145; Ф153-Ф157**
27 Решения задач **М101-М105; Ф116-Ф122**

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

36 Тригонометрические функции — *Ж. М. Раббот*
43 Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года
45 Законы идеальных газов — *Б. Б. Буховцев*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

51 Математические головоломки и развлечения — *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский*

ИНФОРМАЦИЯ

55 Слет учащихся физико-математических школ — *А. Н. Виленкин, Т. С. Петрова*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

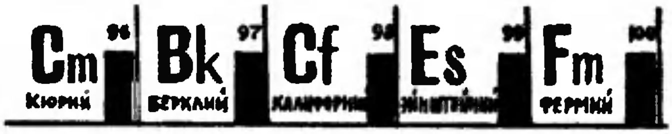
59 Марки, посвященные Леонардо да Винчи — *А. В. Алтыкис*

60 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ *(3-я стр. обложки)*

СМЕСЬ *(стр. 26, 35)*

ИСКУССТВЕННЫЕ ЯДРА



В. И. Кузнецов

Все материальные тела состоят из атомов 88 элементов, встречающихся на Земле. Большинство из этих элементов представляет собой смесь атомов нескольких типов, отличающихся друг от друга по массе. Такие атомы одного и того же элемента, отличающиеся только массой, называются изотопами. Всего у 88-ми природных элементов имеется около 400 природных изотопов, в среднем около 4,5 изотопа на каждый элемент.

Значительно большее число изотопов получено в лаборатории искусственным путем. Таких изотопов в наши дни известно более 1200. Они созданы в ядерных реакциях, осуществленных человеком. Среди них не только изотопы элементов, которые существуют в природе, но и изотопы синтетических элементов, полученных в нейтронных потоках ядерных реакторов и в пучках ускоренных частиц современных ускорителей.

Искусственные элементы уже давно нашли важные практические применения. Так, элемент № 94, плутоний, одна из основ современной ядерной энергетики, и его производят тоннами. Для разведки нефтяных скважин и лечения некоторых болезней применяют изотоп калифорния (98-го элемента) с массовым числом 252. Сейчас производство многих искусственных изотопов налажено в промышленных масштабах. Однако самое интересное в производстве изотопов — это синтез и изучение новых атомных ядер, лежащих за нижним краем таблицы Менделеева.

Чаще всего новые элементы получают путем синтеза (слияния) двух стабильных атомных ядер.

Для того чтобы два ядра образовали единое ядерное вещество, они должны коснуться друг друга своими поверхностями. Добиться этого непросто. Все атомные ядра несут положительный заряд, и когда они сближаются, то отталкивают друг друга с большой силой. Эта сила определяется законом Кулона и равна

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (1)$$

где q_1 и q_2 — заряды атомных ядер, а r — расстояние между их центрами. Ядра можно считать равномерно заряженными шарами (рис. 1), радиус которых определяется формулой

$$r = 1{,}5\cdot 10^{-13}\sqrt[3]{A}\ (см). \qquad (2)$$

Такая формула получается, если предположить, что плотность ядерного вещества в атомах всех элементов неизменна. Тогда объем ядра V будет пропорционален числу A входящих в него нуклонов (нуклонами называют протоны и нейтроны, составляющие атомные ядра), так же как объем плотной кирпичной стены пропорционален числу содержащихся в ней кирпичей: $V = kA$ или

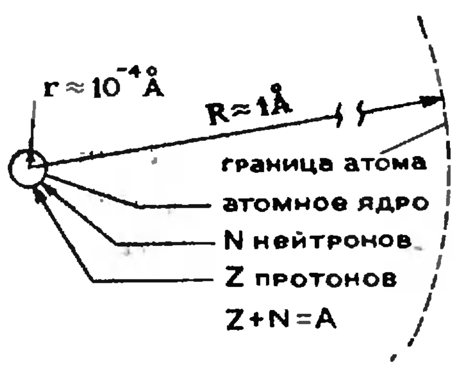


Рис. 1.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = kA$, где k — некоторая постоянная величина. Отсюда $r = \sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}A}$. Величина $\sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}}$ определяется опытным путем и равна $\approx 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ *см* для всех ядер. Таким образом, опыт подтверждает, что *плотность ядерного вещества у атомов всех элементов примерно одинакова*. Она равна громадной величине — 10^{14} *г/см*^{3}. Иными словами, масса 1 *см*^{3} ядерного вещества равна ста миллионам тонн.

Для того чтобы преодолеть силы отталкивания, ядра должны обладать большой кинетической энергией относительного движения, то есть ядра должны сближаться с большой относительной скоростью.

Какова же должна быть эта скорость? Пусть вещество, состоящее из тяжелых атомов (мишень), бомбардируется потоком быстрых атомных ядер (эти ядра называют ядрами-снарядами). *Вплоть до самого соприкосновения* заряженные сферы — ядра — взаимодействуют между собой как точечные заряды. Рассмотрим две частицы (ядро-снаряд и ядро-мишень) как единую систему, не взаимодействующую с другими атомами. Обозначим массу ядра-снаряда m, массу ядра-мишени M, а их массовые числа соответственно A_1 и A_2. Будем считать, что ядро-снаряд налетает на ядро-мишень из бесконечности с начальной скоростью v_0 вдоль линии, соединяющей их центры. Приближаясь к мишени, ускоренное ядро совершает работу против сил отталкивания, равную величине P, зависящей от расстояния r. Кроме того, под действием сил отталкивания со стороны ускоренного ядра A_1 тяжелое ядро A_2 начинает двигаться со скоростью v_2 (рис. 2). Таким образом, энергия ядра-снаряда тратится на работу в электрическом поле и на передачу кинетической энергии ядру-мишени. При этом скорость ядра-снаряда уменьшается. По закону сохранения энергии сумма кинетической и потенци-

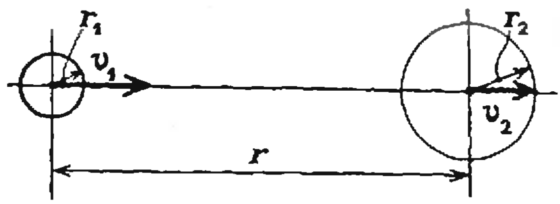


Рис. 2.

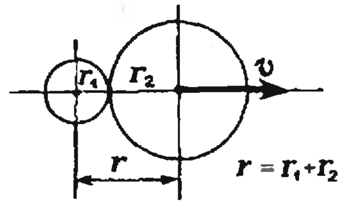


Рис. 3.

альной энергий этих двух частиц в течение всего времени их взаимодействия должна оставаться постоянной. Потенциальная энергия системы равна работе P, а кинетическая —

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}$$

(v_1 — скорость ядра-снаряда).

В начальный момент времени, когда ядро A_1 находилось «на бесконечности», энергия системы равнялась кинетической энергии ядра A_1, то есть $\frac{mv_0^2}{2}$. Следовательно, при сближении ядер

$$P + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} = \text{const}. \quad (3)$$

Так как система ядро-снаряд — ядро-мишень замкнута, то для нее справедлив закон сохранения импульса. В начальный момент времени импульс системы был равен mv_0. Поэтому при сближении ядер

$$mv_1 + Mv_2 = mv_0 = \text{const}. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим момент соприкосновения ядер при условии, что скорость v_0 достаточна лишь для того, чтобы ядра коснулись поверхностями друг друга. Иными словами, скорость v_0 такова, что в момент касания относительная скорость ядра-снаряда и ядра-мишени равна нулю ($v_1 - v_2 = 0$). Следовательно, в интересующий нас момент $v_2 = v_1 = v$. Расстояние между ядрами в этот момент равно сумме их радиусов, то есть r_1+r_2 (рис. 3). Совершенную к этому моменту работу P обозначим буквой B. Тогда уравнения (3) и (4) примут вид:

$$\begin{cases} B+(m+M)\dfrac{v^2}{2}=\dfrac{mv_0^2}{2}, \\ (m+M)v=mv_0. \end{cases} \qquad (5)$$

Исключив из этой системы уравнений v, найдем величину минимальной кинетической энергии, которой должно обладать ядро-снаряд, чтобы расстояние между ядрами стало равным r_1+r_2:

$$E=\frac{mv_0^2}{2}=B\left(1+\frac{m}{M}\right). \qquad (6)$$

Следовательно, для того чтобы произошла реакция синтеза, приводящая к образованию нового ядра, энергия ускоренных частиц (ядер-снарядов) должна быть больше $B\left(1+\frac{m}{M}\right)$.

Более точный расчет по законам квантовой механики приводит, однако, к неожиданному результату. Оказывается, даже если $E<B\left(1+\frac{m}{M}\right)$, то ядра иногда могут слиться в единую каплю. Но вероятность такого, как его называют, «подбарьерного» слияния очень мала.

Теперь нам осталось определить работу B, и тогда искомая величина энергии E будет известна.

В электростатическом поле работа при перемещении единичного заряда из точки *1* в точку *2* равна разности потенциалов электрического поля в этих точках $\varphi_2-\varphi_1$. Потенциал поля равномерно заряженного шара вне него определяется формулой $\varphi=\frac{q}{R}$, где q — заряд шара, а R — расстояние до центра шара.

Таким образом, работа P при перемещении заряда q_2 из точки *1* в точку *2* равна $q_2\left(\frac{q_1}{R_2}-\frac{q_1}{R_1}\right)$. В нашем случае $R_1=\infty$ и $\frac{1}{R_1}=0$, $R_2=r_1+r_2$. Следовательно, воспользовавшись формулой (2), мы можем записать

$$B=\frac{q_1q_2}{r_1+r_2}=\frac{Z_1Z_2e^2}{1{,}5\cdot10^{-13}\left(\sqrt[3]{A_1}+\sqrt[3]{A_2}\right)}. \qquad (7)$$

Энергию B называют потенциальным барьером или просто барьером. Для легких ядер «высота» барьера составляет несколько миллионов электронвольт (*Мэв*), а при слиянии тяжелых ядер барьер достигает сотен миллионов электронвольт. Если в формулу (7) подставить численное значение заряда электрона и выразить энергию B в миллионах электронвольт, то получится простое соотношение для высоты потенциального барьера:

$$B=\frac{0{,}96Z_1Z_2}{A_1^{1/3}+A_2^{1/3}}. \qquad (8)$$

Если масса ядра-мишени значительно больше массы ядра-снаряда, так что можно считать $1+\frac{m}{M}\approx1$, то кинетическая энергия легкой ускоренной частицы, необходимая для осуществления ядерной реакции, будет равна потенциальному барьеру B [см. формулу (6)]. В этом и заключен физический смысл этой величины.

Физик-экспериментатор начинает планировать опыт по синтезу нового атомного ядра с расчета величин B и E. Для этого он пользуется формулами (8) и (6). Когда известна энергия E, можно судить о том, на какой установке, ускоряющей атомные ядра, осуществим тот или иной опыт. Так, для слияния ядер неона ($A=22$, $Z=10$) и урана ($A=238$, $Z=92$) необходимо, чтобы кинетическая энергия ядра неона была бы больше 106 *Мэв*. Сейчас до такой энергии ядра неона можно ускорить только на двух ускорителях в мире: на циклотроне, установленном в Лаборатории ядерных реакций Объеди-

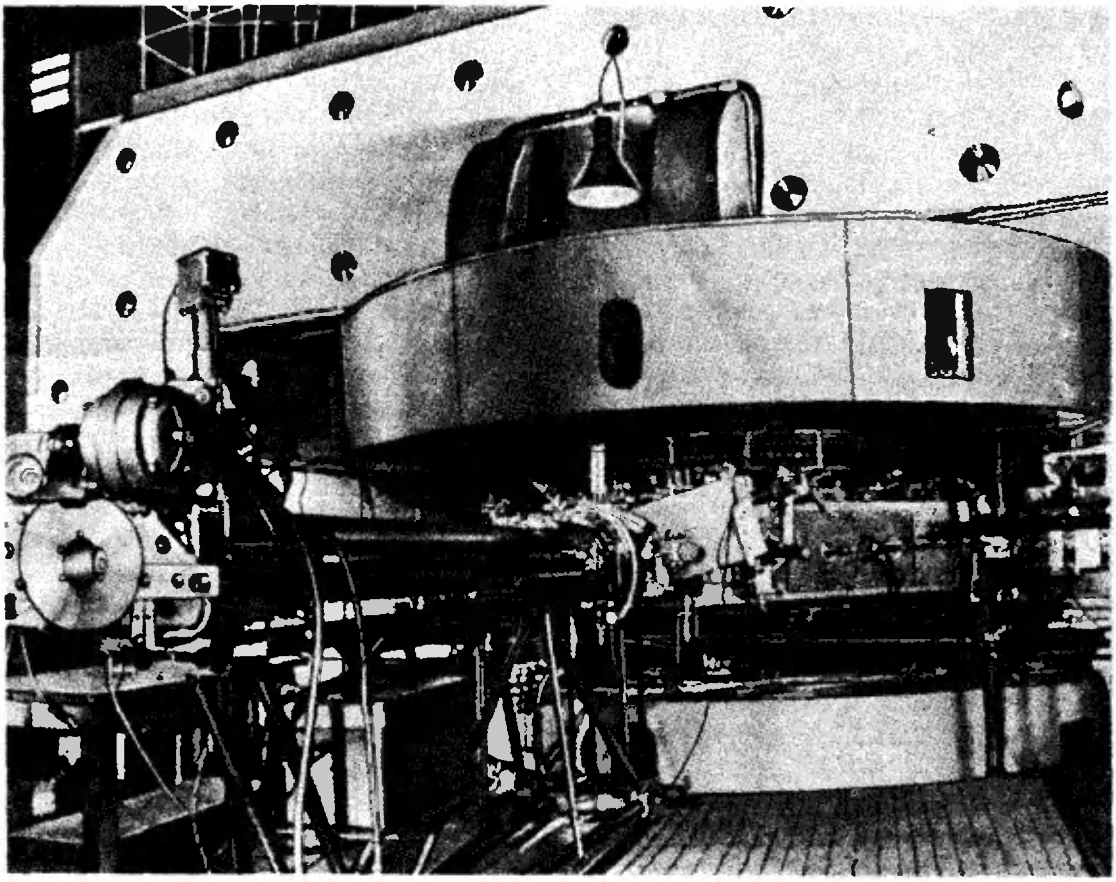


Рис. 4.

ненного института ядерных исследований в подмосковном городе Дубна (рис. 4), и на линейном ускорителе атомных ядер в городе Беркли в США.

Итак, физик определил характеристики нужных ему ускоряемых ядер, выбрал подходящий для этой цели ускоритель и установил на пути ускоренных ядер «тяжелую» мишень. Что произойдет, когда на мишень начнут падать «снаряды»?

Прежде чем ответить на этот вопрос, условимся обозначать ядра разных изотопов и элементов таким образом: около химического символа элемента вверху слева будем писать массовое число A, а внизу — атомный номер. Например, ядро изотопа урана с массовым числом 238 в этих обозначениях запишется так: ${}^{238}_{92}U$. Иногда атомный номер не пишут, поскольку химический символ элемента уже определяет число протонов в его ядре (${}^{238}U$).

После того как ядро-снаряд достигнет ядра-мишени, начинают сказываться особые ядерные силы притяжения, природа которых еще не изучена достаточно полно. Эти силы действуют на очень малых расстояниях. Когда ядра коснутся поверхностями, ядерные силы с избытком компенсируют электростатическое отталкивание, и атомные ядра сливаются в единую ядерную «каплю» — составное ядро:

$$ {}^{22}_{10}Ne + {}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{260}_{102}X. \qquad (9) $$

Образование составного ядра — первая стадия процесса синтеза нового атомного ядра. Составное ядро еще нельзя назвать атомным. Оно неустойчиво и время его жизни слишком мало для образования атома: электроны попросту не успеют занять свои места на орбитах.

В реакции (9) мы приписали составному ядру массовое число, равное сумме массовых чисел образовавших его ядер. Однако в ядерных реакциях синтеза новых элементов масса составного ядра, как правило, больше суммы масс ядер, участвующих в реакции. За счет чего возникает этот избыток?

По соотношению Эйнштейна энергия E связана с массой: $E=mc^2$, где c — скорость света. Следовательно, для увеличения массы на величину $\Delta M=M_{\text{сост}}-(M+m)$ требуется энергия $E^*=\Delta Mc^2$. Некоторая доля кинетической энергии ускоренной частицы переходит в кинетическую энергию составного ядра $M_{\text{сост}}\frac{V^2}{2}\approx(M+m)\frac{V^2}{2}$. Таким образом, на поступательное движение составного ядра и энергию, поглощаемую при слиянии, приходится

$$\varepsilon=\frac{(M+m)V^2}{2}+\Delta Mc^2.$$

При образовании составных ядер в результате слияния таких ускоренных частиц, как углерод $^{12}_{6}C$, кислород $^{16}_{8}O$, неон $^{22}_{10}Ne$, аргон $^{40}_{18}Ar$ с тяжелыми ядрами величина ε значительно меньше кинетической энергии $\frac{mv_0^2}{2}$, необходимой для преодоления кулоновского барьера B. Таким образом,

$$\frac{mv_0^2}{2}-\varepsilon=E-\frac{(M+m)V^2}{2}-\Delta Mc^2=$$

$$=B-\Delta Mc^2=B+Q=E^*.$$

Величину $Q=-\Delta Mc^2$, равную энергии, затрачиваемой на образование составного ядра, называют энергией образования этого ядра. Избыток же кинетической энергии E^*, остающийся в составном ядре, называется энергией возбуждения составного ядра. Энергия E^* при слиянии сложных ядер с тяжелыми ядрами-мишенями достигает значительных величин. Так, величина B реакции слияния $^{22}_{10}Ne$ с $^{238}_{92}U$ [см. формулу (9)] равна 98,1 *Мэв*. При этом $Q=-56{,}1$ *Мэв* и, следовательно, $E^*=B+Q=42$ *Мэв*. Такая энергия сильно нагревает составное ядро, оно становится неустойчивым, начинает совершать колебания и, как правило, делится за очень короткое время на ядра-осколки с атомными номерами, близкими к 50.

Время жизни составного ядра (точнее, среднее время жизни) лежит в интервале $10^{-14}-10^{-18}$ *сек*, в зависимости от энергии возбуждения составного ядра. По житейским представлениям—очень малая величина. Но она достаточно велика по сравнению с «ядерной» единицей времени. За такую единицу принимают промежуток времени, протекающий между двумя последовательными столкновениями нуклона с другими ядерными нуклонами. Это время можно оценить из следующих соображений. Чтобы оставаться внутри ядра, нуклон должен взаимодействовать со своими соседями на расстояниях порядка 10^{-13} *см*. Скорость нуклона в ядре примерно равна 10^9 *см/сек*. Таким образом, для ядерной единицы времени получим 10^{-22} *сек*. Поэтому за время жизни составного ядра, скажем, 10^{-18} *сек*, каждый нуклон испытает около 10^4 столкновений. При этом составное ядро «забывает» о способе своего образования, и вероятность его распада тем или иным путем определяется только его энергией возбуждения.

В некоторых очень редких случаях сильно нагретое составное ядро «испаряет» последовательно один за другим несколько нейтронов. Ядерную каплю покидают наиболее энергичные нейтроны, и поэтому она сильно охлаждается, становится устойчивым атомным ядром нового элемента. Испарение нейтронов напоминает испарение с поверхности нагретой капли обычного вещества, когда вылетают наиболее энергичные атомы, на долю которых пришлась кинетическая энергия бо́льшая, чем средняя кинетическая энергия атомов при данной температуре. Вылетающие с поверхности капли атомы и охлаждают каплю. Нагретое ядро, так же как и обычную каплю, можно характеризовать температурой. При этом $kT = \frac{\overline{mv^2}}{2}$. Здесь k — постоянная Больцмана, T — температура ядра, $\frac{\overline{mv^2}}{2}$ — средняя кинетическая энергия нуклона.

Обычно нуклон уносит из составного ядра энергию порядка 10 *Мэв*. Поэтому в случае слияния урана с неоном, когда энергия ускоренных ядер неона незначительно превосходит высоту барьера B и $E^* = 42$ *Мэв*, из составного ядра вылетают четыре нейтрона. Такая реакция записывается следующим образом:

$$\underbrace{{}^{238}_{92}U + {}^{22}_{10}Ne}_{\text{I}} \rightarrow {}^{260}_{102}X' \rightarrow \underbrace{{}^{256}_{102}X \quad + \quad 4{}^{1}_{0}n}_{\text{II}}.$$

Взаимодействующие ядра — Возбужденное составное ядро — Ядро-продукт — Испарившиеся нейтроны

Здесь ${}^{1}_{0}n$ — символ нейтрона (как и у любого изотопа вверху слева стоит массовое число, внизу — величина заряда, равная нулю). Число нуклонов в ядерных реакциях не меняется. Поэтому сумма верхних индексов в правой части (II) уравнения реакции равна сумме верхних индексов левой части (I) с учетом коэффициента 4, стоящего перед символом нейтроиа. Сохраняется и заряд, поэтому сохраняется сумма нижних индексов.

В реакции слияния урана с неоном учеными Дубны были получены первые атомы элемента № 102. Готовясь к опытам, они выполнили точно такие же расчеты, какие сделаны в этой статье.

Уже говорилось, что реакция образования сто второго элемента протекает лишь в редких случаях. Опытным путем удалось установить, что на 100 миллионов составных ядер рождается только одно ядро изотопа ${}^{256}_{102}X$. В остальных случаях ядра делятся на осколки:

$${}^{238}_{92}U + {}^{22}_{10}Ne \rightarrow {}^{260}_{102}X' \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{ядра-осколки} + \text{нейтроны.}$$

В редких случаях, когда ядро неона отдает урану только часть своих нуклонов, образуются другие изотопы 102-го элемента.

На фоне всех этих побочных продуктов взаимодействия ускоренных ядер с ядрами-мишенями и регистрируется распад ядер нового элемента. Отделить излучения этого элемента от излучений посторонних продуктов — в этом и состоит самая трудная часть опытов по обнаружению изотопов элементов с атомным номером большим ста. Трудности возрастают с увеличением атомного номера. Так, если в реакции слияния неона с плутонием получать ядра элемента № 104, названного «курчатовием» в память о выдающемся советском физике И. В. Курчатове, то одно ядро образуется на 10 миллиардов составных ядер:

$${}^{242}_{94}Pu + {}^{22}_{10}Ne \rightarrow$$

$$\rightarrow {}^{264}_{104}Ku - \begin{cases} \rightarrow {}^{260}_{104}Ku + 4{}^{1}_{0}n \\ \rightarrow 10 \text{ миллиардов делений.} \end{cases}$$

Даже в самых мощных пучках ускоренных ионов за несколько часов рождается только одно ядро курчатовия. Приходится изучать его свойства по распаду отдельных атомных ядер. И все же, несмотря на такой малый к. п. д. реакций слияния тяжелых заряженных частиц, сейчас не существует более эффективных способов получения ядер далеких заурановых элементов.

В реакциях слияния впервые были получены изотопы технеция Tc, кюрия Cm, берклия Bk, калифорния Cf, менделевия Md, курчатовия Ku, элементы №№ 102, 103, 105.

Н. Кудрявская, И. Ломакина, С. Приз

Каждое лето в Крыму в поселке Фрунзенском (это недалеко от всем известного Артека) работает «Малая академия наук» школьников Крыма. В числе прочих отделений и секций этой «академии» (у нее есть еще и более короткое название: «Искатель») имеется школа юных кибернетиков. Работая под руководством сотрудников Симферопольского педагогического института и его Вычислительного центра *), ребята не только усваивают необходимый минимум теоретических сведений по математической логике и теории релейно-контактных схем, составляющий «Азбуку кибернетики», но и учатся конструировать простейшие автоматы и на практике осваивают первые шаги программирования. Правда, они не программируют на электронных вычислительных машинах, да их и нет в «Искателе». Но не беда — у юных кибернетиков есть

Машина Поста

Вообще-то, надо сказать, это вовсе никакая не машина. Это, если угодно, чертеж машины. А еще правильнее сказать — рассказ о машине. Но уж если рассказывать, то рассказывать сначала **).

Тридцать пять лет назад в двух математических журналах (в издаваемом в США международном «Журнале символической логики» и в «Трудах Лондонского математического общества») почти одновременно появились статьи двух выдающихся ученых: американца *Эмиля Л. Поста* и англичанина *Алана М. Тьюринга*, посвященные уточнению издавна употребляемого в математике (да и не только в математике) понятия *алгорифма* (или алгоритма) *). *Алгорифм — это единый общий метод, пригодный для решения целой серии однотипных задач.* Единый — в том смысле, что, зная соответствующий алгорифм, мы можем каждую задачу из данной серии решить без всяких дополнительных раздумий, как говорят, «чисто механически», «формально».

«Формально», «бездумно», «механически» — в эти слова часто вкладывается довольно обидный смысл. И почти всегда напрасно! Посудите сами: додуматься до способа сложения любых многозначных чисел «столбиком» в первый раз было, конечно,

---

*) Школой руководит Валентин Николаевич Касаткин, автор популярных книг «Азбука кибернетики» и «Секрет кибернетики». В конце статьи мы приводим несколько присланных им задач.

**) Данное здесь описание «машины Поста» принадлежит Ю. А. Гастеву.

*) Способ написания определяется лишь традициями и привычкой. Сохранись в русском языке буква Θ («фита» — то же, что греческая «тэта»), то и продолжали бы все писать «алгориΘм»!

громадным достижением. Но хороши бы мы были, если бы каждый раз заново «изобретали велосипед», придумывая способ сложения для каждой пары конкретных чисел! К счастью, нам не приходится тратить время на столь нелепое занятие: ведь мы владеем алгорифмом сложения «столбиком». И для умножения многозначных чисел (любых!) мы знаем алгорифм. И для вычитания. И даже для деления. А среди наших читателей, безусловно, найдутся и такие, кто не забыл алгорифма извлечения квадратного корня из произвольной десятичной дроби... Совсем нетрудно овладеть алгорифмом дифференцирования функций. За дальнейшими примерами незачем ходить в «высшую» математику: алгорифм решения квадратного уравнения (описываемый обычной формулой $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$), алгорифм нахождения наибольшего общего делителя (точнее, не один алгорифм, а два, очень похожих — для чисел и для многочленов), различные алгорифмы решения систем линейных уравнений, всевозможные алгорифмы «упрощения формул» в алгебре и тригонометрии, основанные на применении «раз навсегда вызубренных» тождеств вроде $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, $\sin^2x+\cos^2x=1$ и т. п. Да, можно сказать, вся математика — даром, что пользуется репутацией науки «творческой» — буквально кишит алгорифмами! Ну, а если вдуматься посерьезней, то это ведь и понятно: не имей математики в распоряжении весь этот алгорифмический арсенал, где бы им взять время на решение «нестандартных» задач? (Тем более, что придумывание нового алгорифма, пока он, так сказать, не приобрел этого звания, есть самая что ни на есть нестандартная и творческая задача.) А разве вообще в жизни не так: попытайтесь только представить Моцарта, каждый раз выясняющего, как записать на нотной бумаге или «подобрать» на фортепиано пришедшую ему в голову музыкальную фразу, или Пушкина, мучительно вспоминающего, как пишется слово «любовь» или, скажем, «свобода»... Потому-то и возможно творчество этих художников,— да и любое творчество вообще! — что процесс писания (и многие другие не менее полезные процессы, вроде еды и питья) уже давным-давно *автоматизированы* нашей нервной системой (или алгорифмизированы,— это, как сами понимаете, просто синонимы).

Развитие математики в значительной мере состоит в открытии алгорифмов для новых классов задач и в открытии более совершенных (более быстро приводящих к цели, более общих или более удобных в каком-либо другом отношении) алгорифмов. Первый «род деятельности» можно сравнить с изобретением станков и механизмов для обслуживания новых технологических процессов (примеры: ткацкий станок, паровая машина, передача радиоволн), второй — с модернизацией уже известных изобретений с учетом новых достижений науки и техники (замена металлорежущих станков на электроискровую обработку металлов, переход от ковшовых экскаваторов к роторным или от ламповых радиоприемников, телевизоров и вычислительных машин к транзисторным и т. п.). Ответ же на общий вопрос «Что такое алгорифм?» так же мало нужен математикам, как инженерам и конструкторам ответ на вопрос «Что такое машина?» (не конкретная машина, а *любая*).

«Мало нужен», — сказали мы. Но это лишь до известных пор. От того, что вы назовете паровую машину, двигатель Дизеля, электромотор и домашний холодильник «преобразователями энергии», для тех, кто пользуется этими устройствами или их совершенствует, мало что изменится. Но человеку, пытающемуся создать *вечный двигатель*, владение таким общим понятием сэкономило бы немало времени! Ни Евклиду, ни безвестным «изобретателям» сложения, ни даже Гауссу не было нужды в общем понятии алгорифма. Но понять — и, тем более, доказать, — что бывают *неразрешимые* массовые проблемы (то есть классы задач, не допускающие *никакого* алгорифмического решения, единого для всего класса*)), без такого общего определения уже, конечно, не удастся.

Не менее существенна и чисто «положительная» ценность общего понятия алгорифма: понимание общих закономерностей, которым подчиняются самые различные алгорифмы, играет первостепенную роль для «машинной» математики. Как известно, универсальная электронная вычислительная машина «способна воспринять» программы самых разнообразных математических (да и далеко не только математических) задач**). Машинная же программа это и есть алгорифм, только вдобавок приспособленный к особенностям данной конкретной машины (или записанный на специальном «языке программирования», допускающем «трансляцию», то есть попросту перевод, на языки команд разных машин).

Уже первые работы Тьюринга и Поста, посвященные уточнению понятия алгорифма, давали возможность существенного продвижения в обоих указанных направлениях. Непосредственным побудительным мотивом к такому уточнению в обоих случаях послужило желание установить алгорифмическую неразрешимость некоторых математических массовых проблем (и именно Посту принадлежат первые результаты в этом направлении). Любопытно, что оба ученых пошли, по существу, по одному и тому же пути (вскоре выяснилось, что этот путь—не единственно возможный): вместо интуитивно понятных, но абсолютно непригодных для извлечения точных математических следствий, разговоров о «едином общем методе, пригодном для решения целой серии однотипных задач» (см. начало этой заметки), Тьюринг и Пост выдвинули представление об алгорифме как о некоей абстрактной (мысленной) «машине», описанной в точных математических терминах и в то же время соответствующей нашим представлениям о вычислительном процессе, протекающем по правилам-командам определенного стандартного вида.

Какое именно определение алгорифма принимать — Тьюринга, Поста или принадлежащее кому-либо еще (наиболее известны определения К. Гёделя, А. Чёрча, С. К. Клини, А. А. Маркова, А. Н. Колмогорова)— несущественно: вскоре выяснилось, что все эти определения в определенном смысле эквивалентны. Поэтому выбор какого-либо одного из этих уточнений в качестве исходного определяется не математической стороной дела, а удобством изложения.

«Машина Тьюринга» описана и в серьезных, и в популярных книгах*).

«Машине Поста» в этом отношении повезло меньше, быть может, потому, что «машина» эта, будучи проще «машины Тьюринга», именно по этой причине требует, вообще говоря, более громоздкой системы команд для выполнения конкретной задачи. Кроме единственной статьи самого Поста, это уточнение понятия алгорифма описано, по сути дела, лишь в одном месте: в серии из четырех статей В. А. Успенского в журнале «Математика в школе» за 1967 год. Отсылая читателей к этим очень интересным (и ясно написанным) статьям, расскажем теперь о «машине Поста» лишь самые первоначальные сведения, необходимые для понимания дальнейшего.

---

*) Об алгорифмически неразрешимых проблемах см., например, статью Ф. Л. Варпаховского и А. Н. Колмогорова «О решении десятой проблемы Гильберта» («Квант», № 7, 1970).

**) См., например, статьи Р. С. Гутера «Что умеют машины» («Квант», № 5, 1970) и «Язык человека и язык машины» («Квант», № 10, 1971).

*) Из их числа в первую очередь рекомендуем читателю книгу Б. А. Трахтенброта «Алгоритмы и машинное решение задач», Физматгиз, 1960, 2-е изд.

Итак, идея Поста *) состоит в том, что любой алгорифм может быть представлен в виде следующей абстрактной «машины» **). Машина состоит из *ленты*, разделенной на *секции* (ячейки); в «абстрактной» машине Поста эта лента предполагается бесконечной, желая же иметь «действующую модель» машины Поста, вы можете взять обычную бумажную ленту для заклеивания окон, расчертить ее карандашом на прямоугольные ячейки произвольного размера и, в случае надобности, подклеивать к ней новые куски ленты. В секции может стоять *метка* (в этой роли в вашей «модели» с успехом могут выступать обычные спички, пуговицы или кнопки) или не стоять ничего; в первом случае секция называется *отмеченной*, во втором — *пустой*. В машине есть еще одна (причем последняя) «деталь», называемая *кареткой*, или *считывающей и записывающей головкой*; каретка движется вдоль ленты, «обозревает» ячейку, против которой она находится и, в случае надобности (в соответствии с очередной командой, совокупность которых образует программу), записывает с нее метку или, наоборот, стирает метку. В вашей модели функции головки будут разделены: «считывать» вы, разумеется, будете просто глазами, в роли записывающего устройства будет выступать рука, кладущая и снимающая спички из ячеек, а чтобы не забыть, где в данный момент находится ваша «каретка», кладите что-нибудь против «обозреваемой» ячейки,— ну, хотя бы спичечный коробок.

Программа машины Поста (инструкция, алгорифм, в соответствии с которым она «работает») состоит, как уже говорилось, из *команд*. Команды бывают следующих шести видов.

---

*) Именно идея: слова «машина» в изложении самого Поста нет.

**) Поскольку на условность термина мы уже внимание обратили, в дальнейшем изложении при слове «машина» мы больше не будем ставить кавычек.

I. Команды движения вправо

$$a.\Rightarrow b$$

(a — это номер данной команды в программе, то же и в дальнейших командах; b — номер команды, к выполнению которой следует перейти; каретку при этом надо сдвинуть на одну секцию вправо).

II. Команды движения влево

$$a.\Leftarrow b$$

(сдвинуть каретку на одну секцию влево и перейти к выполнению команды № b).

III. Команды печатания метки

$$a.\ \vee\ b$$

(напечатать метку в обозреваемой секции и перейти к команде № b).

IV. Команды стирания метки

$$a.\ \xi\ b$$

(стереть метку из обозреваемой секции и перейти к команде № b).

V. Команды передачи управления

$$a.?\begin{matrix}\nearrow b\\ \searrow c\end{matrix}$$

(если обозреваемая секция пуста — перейти к команде № b, если же обозреваемая секция отмечена — перейти к команде № c).

VI. Команда остановки

$$a.\ \text{стоп}$$

(прекратить выполнение программы).

Если задать некоторую программу (то есть список из n, $n\geqslant 1$, команд, расположенных в порядке возрастания номеров от 1 до n, в правые части которых не входят никакие натуральные числа, кроме, быть может, чисел $1,2,\dots,n$) и определенное состояние машины (то есть указание, какие секции отмечены и против какой секции находится обозревающая ее каретка), машина начнет выполнять программу (докажите, что по меньшей мере один шаг она сделает в любом случае!), после чего возможны три исхода:

1) машина дойдет до невыполнимой команды (печатание метки в отмеченной секции или стирание метки из пустой секции) — так называемая *безрезультатная остановка*;

2) машина дойдет до команды остановки — *результативная остановка*;

3) ни один из первых двух случаев не осуществится — машина будет работать *бесконечно*.

Пример 1. В программе

1. $\Rightarrow 2$
2. ξ 3
3. стоп,

примененной к пустой ленте, безрезультатная остановка наступит уже на втором шагу (так что до предписываемой третьей командой результативной остановки дело так и не дойдет).

Пример 2. Программа

1. $\Rightarrow 2$
2. $\Rightarrow 3$
3. стоп,

примененная к пустой ленте, будет выполняться следующим образом: каретка передвинется на две секции вправо от обозреваемой, после чего машина остановится.

Пример 3. Если программу

1. $\vee 2$
2. $\Rightarrow 3$
3. $\Rightarrow 1$

применить к пустой ленте, то машина будет печатать, начиная с обозреваемой секции, метки через одну и никогда не остановится.

Дальнейшие примеры читатель найдет в уже упомянутых статьях В. А. Успенского.

Мы же сейчас предоставим слово участникам школы юных кибернетиков «Малой академии наук», ученицам 9-го класса Бахчисарайской школы № 2 *Наташе Кудрявской*, *Ире Ломакиной* и *Светлане Приз*, которые расскажут вам о своем опыте обучения программированию с помощью машины Поста (работа которой в сильно упрощенном виде воспроизводит работу любой современной универсальной вычислительной машины). Девочки испытывали свои программы на изготовленной сотрудниками Вычислительного центра Симферопольского педагогического института металлической модели, снабженной клавишами, тумблерами, штеккерами и прочими непременными атрибутами «кибернетических машин». «Лента» в этой «действующей модели» состоит из электрических лампочек (40 штук; выход за пределы ленты квалифицируется как безрезультатная остановка машины), причем отмечаемые секции загораются, а стираемые — гаснут *).

...Очень интересно программировать и видеть, как, подчиняясь твоей программе, машина решает задачи. Счетчик команд позволяет видеть, какая команда выполняется в данный момент. Программа сначала записывается на бумаге, а затем с помощью штеккеров заносится на наборное поле машины (каждой команде соответствует свой двоичный код). Машина работает (в автоматическом режиме) не очень быстро, поэтому все ее действия хорошо наблюдаются; выполнение программы можно приостановить.

Интересно наблюдать, как машина выступает соперником человека в различных играх. Мы решаем задачи и по составлению программ, пользуясь которыми машина никогда не проигрывает **). Вот пример такой программы. Условия игры: на ленте стоит подряд 26 меток, самая левая из которых обозревается кареткой. Человек и машина ходят по очереди (начинает игру всегда человек), стирая за свой ход не более четырех меток. Тот, кто стирает последнюю метку, проигрывает. Если условиться,

*) Мы специально не останавливались выше на всех этих впечатляющих деталях, дабы не отвлекать читателя от сути дела; различие между «электронной моделью машины Поста» и описанной выше «спичечно-бумажной» примерно того же рода, что различие между магазинными чеками, отпечатанными на электрическом или ручном кассовом аппарате и выписанными от руки.

**) То есть всегда выигрывает: все эти игры таковы, что не допускают ничейного исхода.

что стираемые человеком метки (одна, две, три или четыре) — всегда самые крайние слева, то искомая программа будет иметь следующий вид:

1\. ? $\begin{smallmatrix}\nearrow 2\\ \searrow 1\end{smallmatrix}$
2\. $\Rightarrow 3$
3\. $\Rightarrow 4$
4\. $\Rightarrow 5$
5\. $\Rightarrow 6$
6\. ? $\begin{smallmatrix}\nearrow 7\\ \searrow 8\end{smallmatrix}$
7\. стоп
8\. ξ 9
9\. $\Leftarrow 10$
10\. ? $\begin{smallmatrix}\nearrow 11\\ \searrow 8\end{smallmatrix}$
11\. $\Rightarrow 12$
12\. ? $\begin{smallmatrix}\nearrow 11\\ \searrow 1\end{smallmatrix}$

Вот краткие пояснения к программе. 1-я команда — передача управления: машина перейдет ко 2-й команде только после того как человек сделает ход. По 2-й, 3-й, 4-й и 5-й командам каретка сдвигается вправо, а по 8-й команде *) стирает в обозреваемой секции метку и переходит к 9-й команде, по которой она сдвигается влево и переходит к команде № 10. По этой команде, если обозреваемая секция пуста, машина выполняет 11-ю команду, а если отмечена — 8-ю. По 11-й команде каретка сдвигается вправо и переходит к 12-й команде. Если теперь секция, под которой находится каретка, пуста, то машина возвращается к 11-й команде, а если отмечена, начинает все сначала, то есть переходит к 1-й команде.

*) Назначение 6-й и 7-й команд — остановка после того, как человек сотрет последнюю метку.

Задачи

1\. а) Докажите, что описанная здесь «машинная стратегия» действительно всегда обеспечивает выигрыш.

б) Докажите, что та же программа обеспечивает беспроигрышную игру машины для случаев, когда на ленте отмечено 11 или 16 меток; для какого еще числа меток на ленте годится та же программа (дайте ответ по возможности в общем виде)?

2\. Дан массив из n меток (то есть n идущих подряд отмеченных секций). Составьте программу, расставляющую эти метки на ленте так, чтобы между каждой парой было по одной пустой секции (каретка обозревает крайнюю правую из отмеченных секций).

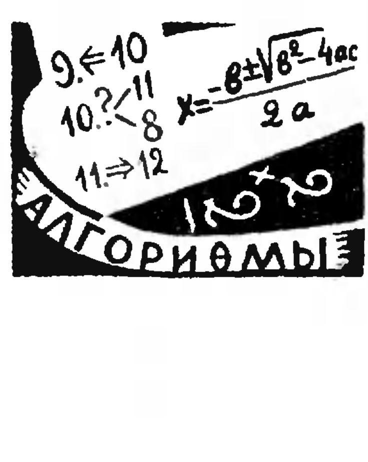
3\. (Эта и следующие две задачи предложены В. Н. Касаткиным.) На ленте имеется массив из n отмеченных секций (обозревается крайняя левая из них), а справа от него, на расстоянии в m секций — еще одна отмеченная секция. Составьте программу, придвигающую данный массив к данной секции.

4\. На ленте расположены два массива разной длины (обозревается крайняя секция одного из них). Составьте программу, сравнивающую длину массивов и стирающую больший из них. (Отдельно продумайте случай, когда длины массивов равны.)

5\. На ленте дан массив, крайняя слева секция которого обозревается кареткой. Составьте программу, наносящую на ленту еще один массив той же длины, находящийся через две пустых секции вправо от данного.

6\. На ленте даны два массива на расстоянии одной пустой секции друг от друга, причем каретка находится под крайней слева отмеченной секцией левого массива. Составьте программу, придвигающую эти массивы друг к другу.

7\. Составьте выигрывающую программу для следующей игры. На ленте машины Поста отмечена 21 секция, крайняя слева обозревается. Человек и машина ходят по очереди (первым ходит человек!), стирая за ход не более 6 меток. Побеждает (в отличие от приведенной выше игры) тот, кто стирает последнюю метку.



О числе e и $n!$

Л. Г. ЛИМАНОВ

В этой заметке мы разберем задачи из статьи М. И. Башмакова «О постулате Бертрана» (см. «Квант» № 5, 1971).

Напомним, что постулатом Бертрана называется следующее утверждение: *если* $x>1$, *то существует простое число, заключенное между* x *и* $2x$.

Это утверждение сформулировал французский математик Бертран, но отыскать доказательства для него не сумел. Это удалось сделать Чебышеву, причем сделать совершенно элементарно. Правда, он воспользовался одной не элементарной формулой — формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n/12n}, \qquad \text{где } 0<\theta_n<1.$$

В эту формулу входят два едва ли не самых замечательных числа. Первое — это всем вам известное число π — отношение длины окружности к ее диаметру. Второе число — это число e — предел последовательности $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ при n, стремящемся к бесконечности. Формула эта понадобилась Чебышеву для того, чтобы оценить величину $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

На самом же деле, чтобы доказать постулат Бертрана, можно использовать существенно менее точные оценки величины $n!$

Именно такие оценки и предлагалось доказать читателю в статье Башмакова (задача 3). С разбора этой задачи мы и начнем.

Вот ее формулировка:

Докажите, что существует такое действительное число e, что при всех натуральных n, больших некоторого n_0,

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Неравенства $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ можно использовать вместо формулы Стирлинга. Они, конечно, менее точны, но зато и доказать их намного проще.

Остальные задачи из статьи — это, по сути дела, леммы из чебышевского доказательства постулата Бертрана. Решить их намного проще, чем задачу 3. Заслуга Чебышева не в том, что он их решил — сделать это нетрудно, — а в том, что он их сформулировал и нашел, как с помощью этих утверждений получить оценки для произведения (и, тем самым, для количества) простых чисел, не превосходящих x, и доказать постулат Бертрана.

Решение задачи 3. Примем пока без доказательства, что такое число e, что при всех натуральных n

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

действительно существует. (Доказательство существования будет приведено чуть ниже.)

Мы хотим доказать, что $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ или (что то же самое) $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{n^n}{(n-1)!}$ при n, бо́льших некоторого n_0.

Пусть для некоторого k доказано, что $\frac{(k+1)^k}{k!} < e^k$. Но $\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)!} \Big/ \frac{(k+1)^k}{k!} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} < e$. Поэтому $\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)!} < e^{k+1}$.

Таким образом, наше утверждение верно и для $k+1$, а значит, и для $k+2$, $k+3$ и т. д. Точно так же из предположения

$$e^k < \frac{k^k}{(k-1)!}$$

выводится, что

$$e^{k+1} < \frac{(k+1)^{k+1}}{(k)!}.$$

Действительно,

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \Big/ \frac{k^k}{(k-1)!} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} > e.$$

Остается доказать, что e существует, и найти начальные значения для n в каждом из неравенств

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n!,\ n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Доказательство существования e

Условимся называть совокупность действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, отрезком с концами a и b (отрезок с концами a и b обозначается через $[a, b]$).

При доказательстве существования числа e мы будем пользоваться следующим свойством действительных чисел: если есть последовательность отрезков $[a_i, b_i]$, где $a_i \leqslant a_{i+1} < b_{i+1} \leqslant b_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ (о такой последовательности говорят, что она является последовательностью вложенных отрезков), то существует точка α, общая для всех этих отрезков.

Это свойство мы не будем доказывать. Дело в том, что при четком определении того, что мы понимаем под множеством действительных чисел, это (или какое-нибудь эквивалентное ему) свойство принимается как аксиома.

Упражнения

1. Проверьте, что следующие свойства действительных чисел эквивалентны; если принять любое из них без доказательства, то остальные из него выводятся.

а) У всякой последовательности вложенных отрезков есть хотя бы одна общая точка.

б) Всякая ограниченная монотонно возрастающая последовательность имеет предел.

в) Всякая последовательность $\{a_i\}$ $(i=1,2,\ldots)$, в которой для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N (зависящее, разумеется, от ε), что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $m, n > N$ имеет предел. (Такие последовательности называются последовательностями Коши.)

г) Всякое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань, то есть можно указать такое число α, что все принадлежащие этому множеству числа не больше α, но для всякого числа β, меньшего α, найдутся числа из этого множества, бо́льшие β.

д) Из всякого семейства отрезков, покрывающих отрезок $[a,b]$, можно выделить конечное семейство отрезков, покрывающих отрезок $[a, b]$. (Мы говорим, что система M отрезков покрывает отрезок $[a, b]$, если для всякого x, принадлежащего отрезку $[a, b]$, найдется отрезок из системы M, содержащий x.)

Покажем теперь, что последовательность $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ — монотонно возрастающая. Для этого нужно, чтобы при любом n $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ было меньше $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

С помощью несложных преобразований это неравенство можно привести к такому виду:

$$[(n^2+2n+1)^n-(n^2+2n)^n](n+1)<(n^2+2n)^n. \qquad (1)$$

[Вот промежуточные неравенства: $(n+1)^{2n+1}<(n+2)^{n+1}n^n$ и $(n^2+2n+1)^n(n+1)<(n^2+2n)^n(n+2)$.] Воспользовавшись формулой $a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1})$, получаем: $(n^2+2n+1)^n-(n^2+2n)^n<n(n^2+2n+1)^{n-1}$. Поэтому неравенство (1) будет доказано, если мы докажем такое неравенство:

$$(n^2+2n+1)^{n-1}(n+1)<(n^2+2n)^{n-1}(n+2).$$

Оно в свою очередь (это оказывается точно так же) следует из неравенства

$$(n^2+2n+1)^{n-2}(n+1)<(n^2+2n)^{n-2}(n+2).$$

Повторяя эти рассуждения, мы убеждаемся, что неравенство (1) следует из очевидного неравенства

$$n+1<n+2.$$

Еще проще показать, что при любом натуральном n

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}. \qquad (2)$$

В самом деле, неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$(n+1)^{2n+3}>(n+2)^{n+2}n^{n+1}.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$[(n^2+2n+1)^{n+1}-(n^2+2n)^{n+1}](n+1)>(n^2+2n)^{n+1}. \qquad (3)$$

Но

$$(n^2+2n+1)^{n+1}-(n^2+2n)^{n+1}>(n^2+2n)^n(n+1),$$

откуда

$$[(n^2+2n+1)^{n+1}-(n^2+2n)^{n+1}](n+1)>(n^2+2n)^n(n+1)^2>$$
$$>(n^2+2n)^n(n^2+2n)=(n^2+2n)^{n+1},$$

то есть неравенство (3), а значит, и неравенство (2), — доказано.

Итак, мы доказали, что последовательность $a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, а последовательность $b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает. Кроме того, $a_n<b_n$, поскольку $\frac{n+1}{n}>1$. Таким образом последовательность отрезков с концами a_i, b_i является последовательностью вложенных отрезков и длина k-го отрезка равна $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\cdot\frac{1}{k}$, то есть при росте k она стремится к нулю. Поэтому у всех этих отрезков есть ровно одна общая точка. Соответствующее ей число и называется числом e.

Можно вычислить сколько угодно десятичных знаков числа e. Вот первые несколько: $e=2{,}71828\ldots$

Поскольку $e>2$, неравенство $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!$ выполняется уже при $n=1$. Неравенство $n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n=1,\ 2,\ \ldots\ 6$ не выполняется, однако при $n=7$, а следовательно, и при бо́льших n, — оно верно. (Мы не будем этого проверять, однако заметим, что это несложно сделать с помощью таблицы натуральных логарифмов — логарифмов по основанию e.)

Мы доказали, что $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ стремится к e. На самом деле можно доказать, что $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ стремится к e^x. Именно это и предлагается сделать в следующих упражнениях.

Упражнения

2. Докажите, что последовательность $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$, где x — положительное число, монотонно возрастает.

3. Докажите, что последовательность $\left(\frac{n+x}{n}\right)^{n+l}$, где l — натуральное число, большее x, монотонно убывает.

4. Выведите из утверждений 2 и 3, что последовательность $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ при любом положительном x имеет конечный предел.

5. Докажите, что у последовательностей $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ и $\left(\frac{n+x}{n}+\frac{y}{n^2}\right)^n$ пределы совпадают.

6. Предел последовательности $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ мы обозначим через $e^{x'}$ [здесь x' — некоторое число, зависящее от x: $x'=f(x)$]. Выведите из 5, что

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2).$$

7. Докажите, что $f(0)=0$ и что при натуральных x $f(x)=x$.

8. Докажите, что у последовательности $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n$ при отрицательном x также существует предел $e^{f(x)}$, причем $f(-x)=-f(x)$.

9. Докажите, что если m и n — целые числа ($n\neq 0$), то $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$.

10. Докажите, что функция $f(x)$ монотонно возрастает.

11. Докажите, что $f(x)=x$.

Разберем теперь остальные задачи из статьи М. И. Башмакова.

Формулировки задач

Напомним обозначения:

$\pi(x)$ — это число простых чисел, не превосходящих x;

$\theta(x)$ — логарифм произведения всех простых чисел, не превосходящих x:

$$\theta(x)=\log 2+\log 3+\log 5+\ldots=\sum_{p\leqslant x}\log p \qquad (\theta(x)=0 \text{ при } x<2);$$

$T(x)$ — логарифм произведения всех натуральных чисел, не превосходящих x: $T(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\log n$;

$\psi(x)$ — логарифм наименьшего общего кратного всех натуральных чисел, не превосходящих x: $\psi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}a_p\log p$, где $p^{a_p}\leqslant x$, $p^{a_p+1}>x$.

$$S(x)=T(x)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)+T\left(\frac{x}{30}\right).$$

Задача 1. *Доказать, что*

$$T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots$$

Задача 2. *Доказать, что*

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + \cdots$$

Воспользовавшись результатом задачи 1, $S(x)$ можно записать так:

$$S(x) = A_1\psi(x) + A_2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + A_3\psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots$$

Задача 4. *Проверьте, что коэффициенты $A_1, A_2, A_3 \ldots$ меняются с периодом 30 и что для первых тридцати значений n коэффициенты A_n составляют следующую последовательность*: 1, 0, 0, 0, 0, —1, 1, 0, 0, —1, 1, —1, 1, 0, —1, 0, 1, —1, 1, —1, 0, 0, 1, —1, 0, 0, 0, 0, 1, —1.

Задача 5. *Докажите, что*

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leqslant \theta(y) \leqslant \psi(x) - \psi(\sqrt{x}).$$

Задача 6. *Докажите, что*

$$\frac{\psi(x)}{\log x} < \pi(x) < \frac{\psi(x) + \theta(x)}{\log x}.$$

Решение задачи 1. Заметим, что $a_p = [\log_p x]$. Вычисляем, с каким коэффициентом входит $\log p$ в сумму $\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots$ В $\psi\left(\frac{x}{i}\right)$ логарифм p входит с коэффициентом $\left[\log_p \frac{x}{i}\right]$, значит, общий коэффициент при $\log p$ равен $\sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]} \left[\log_p \frac{x}{i}\right]$. Вычтем из каждого слагаемого единицу и преобразуем его: $\left[\log_p \frac{x}{i}\right] - 1 = \left[\log_p \frac{x}{i} - 1\right] = \left[\log_p \frac{x_1}{i}\right]$, где $x_1 = \frac{x}{p}$. Поэтому $\sum \left[\log_p \frac{x}{i}\right] = \left[\frac{x}{p}\right] + \sum \left[\log_p \frac{x_1}{i}\right]$. Повторяя наше преобразование, мы получим такое равенство:

$$\sum \left[\log_p \frac{x}{i}\right] = \sum_{l=1}^{[\log_p x]} \left[\frac{x}{p^l}\right].$$

Итак, коэффициент при $\log p$ в сумме $\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots$ равен $\sum\limits_{l=1}^{[\log_p x]} \left[\frac{x}{p^l}\right]$.

Заметим теперь, что $T(x) = \sum\limits_{i \leqslant x} \log i$ тоже можно представить в таком виде: $T(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} c_p \log p$, где p — простые числа.

Упражнения

12. Докажите, что если k — натуральное число, то $\left[\frac{x}{k}\right] = \left[\frac{[x]}{k}\right]$ и при $x > 1$ $[\log_k [x]] = [\log_k x]$.

13. Убедитесь, что коэффициент c_p равен

$$\sum_{i=1}^{[\log_p [x]]} \left[\frac{[x]}{p^i}\right].$$

Указание. Представьте $T(x)$ в виде $\log([x]!)$.

Решив упражнения 12 и 13, вы полностью решите задачу 1.

Решение задачи 2. Решение этой задачи похоже на решение задачи 1: нужно убедиться, что коэффициент при p в сумме $\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\cdots$ равен $[\log_p x]$. Сделать это совсем просто. $\log p$ входит слагаемым в $\theta(\sqrt[i]{x})$, если $\sqrt[i]{x} \geqslant p$, то есть $\log_p x \geqslant i$. Поэтому в $\sum \theta(\sqrt[i]{x})$ логарифм p входит слагаемым k раз, где k определяется из неравенства $k+1 > \log_p x \geqslant k$, то есть $[\log_p x]$ раз.

Решение задачи 4. Эта задача очень похожа на задачу **M92** (см. «Квант» № 7, 1971).

Действительно, ее можно сформулировать следующим образом:

В первую же поездку в магазин Петя купил себе много маленьких шоколадок. Он решил, что в скучные дни ему следует съедать три шоколадки, в те дни, когда он занят только одним делом — две, а в остальные — по одной. Тогда A_i+2 равно числу шоколадок, которые Петя съел в $i+1$ день. (Напомним, что Петя каждый второй день ездил купаться, каждый третий — в магазин и каждый пятый решал математические задачи).

Приведем формулу для A_i:

$$A_i = 1-[2^{[i/2]-i/2}]-[2^{[i/3]-i/3}]-[2^{[i/5]-i/5}]+[2^{[i/30]-i/30}]. \qquad (4)$$

Упражнения

14. Докажите формулу (4).
15. Выведите формулу для числа дел, которые будет делать Петя в k-й день.

Из формулы (4) сразу видно, что $A_{i+30}=A_i$. Вычислить значения первых тридцати коэффициентов вы, конечно, сумеете сами.

Решение задачи 5. Эта задача следует из задачи 2. Действительно,

$$\psi(x)-\psi(\sqrt{x})=\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\cdots \geqslant \theta(x),$$

а

$$\psi(x)-2\psi(\sqrt{x})=\theta(x)-\theta(\sqrt{x})+\cdots \leqslant \theta(x).$$

Решение задачи 6. Поскольку $a_p=[\log_p x]$,

$$a_p \log p \leqslant \log_p x \log p = \log x, \quad (a_p+1)\log p > \log x.$$

Поэтому

$$\psi(x)=\sum_{p\leqslant x} a_p \log p \leqslant \sum_{p \leqslant x} \log x = \pi(x)\log x,$$

$$\psi(x)+\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}(a_p+1)\log x > \sum_{p\leqslant x}\log x=\pi(x)\log x,$$

откуда

$$\frac{\psi(x)}{\log x} < \pi(x) < \frac{\psi(x)+\theta(x)}{\log x}.$$

Исследование волн на поверхности воды

К. Стонг

Ниже мы публикуем переработанный вариант статьи, помещенной в октябрьском номере журнала «Scientific American» за 1962 год.

Публикацию статьи подготовил А. С. Варпаховский.

С различными волнами мы встречаемся повсюду, начиная от гамма-лучей с очень маленькой длиной волны до огромных волновых перемещений в облаках рассеянной между звездами мелкой пыли. Но так как все волны переносят энергию, то не удивительно, что их поведение во многом одинаково.

В однородной среде волны распространяются по прямым линиям с постоянной скоростью, изменяя направление и скорость в тех местах, где изменяются физические свойства среды. Если звуковая волна в атмосфере попадает на твердый объект, например, кирпичную стену, то часть ее возвращается, подобно эху, к источнику.

Изучение волн одного типа позволяет исследователю узнать, что можно ожидать от волн других типов. Так, например, о некоторых акустических свойствах аудитории можно судить, наблюдая за поведением волн в плоской ванне с водой.

Волновую ванну можно сделать в домашних условиях (рис. 1). Основная ее часть состоит из деревянной рамки *6* со стеклянным дном. Толщина рамки около 5 *см*, площадь стеклянного дна $\approx 0{,}2$ *м*^{2}. Чтобы вода не протекала, дно следует прикрепить к раме мастикой или пластилином. Ванна устанавливается на четырех ножках на высоте около 0,5 *м* от пола. В качестве источника света для отбрасывания теней от ряби на экран *9*, расположенный под стеклом, используется матовая лампа *5* мощностью 100 *вт*. Лампу помещают в коробку из огнеупорного картона *2* и устанавливают на высоте около полуметра над ванной на деревянной раме. В коробке нужно проделать отверстие *3*, чтобы получить точечный источник света.

На двух кронштейнах *10* закрепляется деревянная перекладина *11*. К этой перекладине на резинках подвешивается брусок, который и служит для возбуждения волн. Расстояние между бруском и водой можно регулировать изменением положения металлических кронштейнов и укорачиванием или удлинением резиновых подвесов.

В середине бруска (рис. 2) бельевой прищепкой *4* закрепляется полуторавольтовая батарея для игрушечного мотора. Жестким проводом, согнутым под прямым углом, к бруску прикреплены несколько бусинок *5* из стекла или пластика; расстояние между ними можно менять, если сделать в бруске отверстия через каждые 5 *см*. К валу мотора прикреплен винт длиной 2—3 *см*, выполняющий роль эксцентрического груза. Вал *1* проходит через отверстие, просверленное около головки винта, который жестко крепится гайкой; вторая гайка *3* находится в начале винта. Скорость мотора можно регулировать обычным реостатом, состоящим из тонкой стальной пружины и зажима типа «крокодил». Один конец пружины соединен с батареей, а зажим соединен с одним из выводов мотора. Необходимая скорость подбирается подключением вывода мотора к различным точкам пружины.

По внутреннему краю ванны (рис.3) проложена мягкая алюминиевая сетка *8*, загнутая под прямым углом по всей длине и покрытая одним слоем марли *9*. Такое сочетание марли и сетки поглощает энергию набегающих волн. Таким образом предотвращается отражение от краев ванны, что могло бы служить помехой.

Прибор выравнивают, заполняют ванну водой на глубину 2 *см*, включают лампу, подключают вывод мотора к стальной пружине и устанавливают высоту деревянного бруска так, чтобы один из стеклянных шариков касался воды. Вращение эксцентрического груза заставляет вибрировать прямоугольный кронштейн, а шарик — подниматься и опускаться в воде. Амплитуда волн регулируется изменением положения свободной гайки на крепежном винте. Длина волны, определяемая расстоянием между гребнями соседних волн, изменяется в зависимости от скорости мотора. Контрастность между светом и тенью волновой картинки, проектируемой на экран, регулируется поворотом лампы. Прибор должен иметь по крайней мере два шарика, то есть два точечных источника волн. Для получения волн с прямыми фронтами (аналога плоских волн, распространяющихся в трехмерных средах) держатель шарика поворачивают вверх, а сам брусок опускают в воду.

Установите прибор так, чтобы он возбуждал плоские волны с расстоянием между гребнями около 5 *см*. Волны будут расходиться от источ-

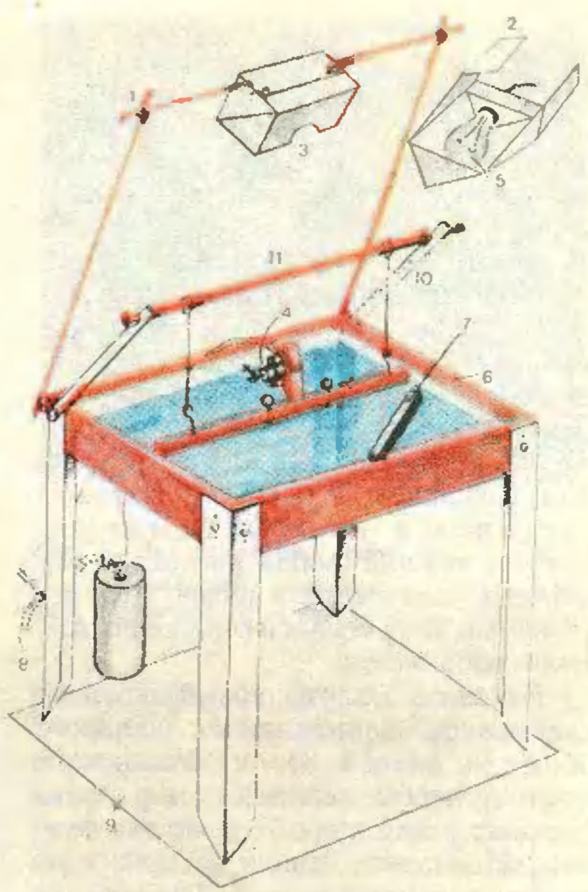


Рис. 1. Волновая ванна для моделирования волн.

1 — держатель источника света; *2* — защитная коробка; *3* — отверстие для света; *4* — мотор-вибратор (1,5 *в*); *5* — матовая лампа; *6* — рамка со стеклянным дном; *7* — парафиновый отражатель; *8* — зажим и стальная пружина для регулировки скорости мотора; *9* — экран; *10* — кронштейны; *11* — перекладина.

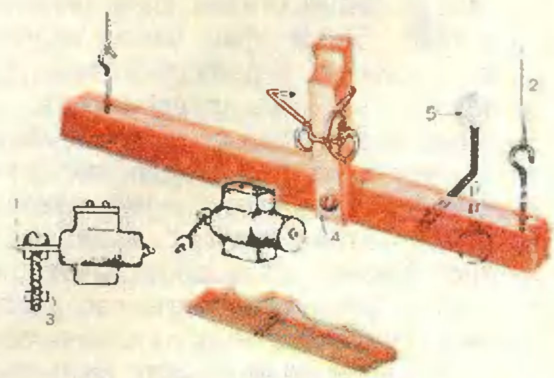


Рис. 2. Детали волнового генератора.

1 — вал, проходящий через отверстие в винте; *2* — держатели из резиновых полос; *3* — груз для регулирования амплитуды колебаний; *4* — мотор-вибратор, фиксируемый бельевой прищепкой; *5* — шарик на проволоке (его можно повернуть вниз для получения точечного источника волн).

ника к переднему краю ванны и там поглощаться. Установите лампу так, чтобы контрастность была максимальной. В ванне под углом 45° поставьте парафиновый барьер и посмотрите, как отражаются волны (рис. 4). В частности, можно убедиться, что угол Θ_i между направлением распространения волн и линией, перпендикулярной к барьеру, равен углу Θ_r между направлением распространения отраженных волн и тем же перпендикуляром.

Установите барьер под другим углом, меньшим, чем 45° и измените длину волн и амплитуду. Легко убедиться, что при любом расположении барьера угол падения равен углу отражения. Это — закон отражения для волн любого типа.

Замените парафиновый барьер стеклянной пластинкой шириной 15 *см* и длиной 30 *см*. Установите ее так, чтобы верхняя поверхность была на расстоянии 1 *см* от дна ванны. Наполните ванну водой так, чтобы расстояние от стекла до поверхности воды составляло 2—3 *мм*, и создайте ряд плоских волн. Посмотрите, как замедляются волны при пересечении края стекла и столкновении с мелкой водой. Из-за изменения скорости волны распространяются в новом направлении над стеклом так же, как шеренга солдат, которая сходит с сухопутного моста на грязную дорогу (рис. 5). В этом опыте волны отклоняются от первоначального направления за счет преломления — явления, наблюдаемого у волн всех типов, когда они попадают под углом из одной среды в другую, в которой распространяются с иной скоростью. Волны на воде отличаются тем, что меняют скорость распространения при изменении глубины среды. Приблизительно можно считать, что отношение скоростей распространения волн в мелкой и глубокой воде пропорционально отношению глубин воды. Это отношение в действительности не что иное, как показатель преломления на границе двух сред. Скорость распространения световых

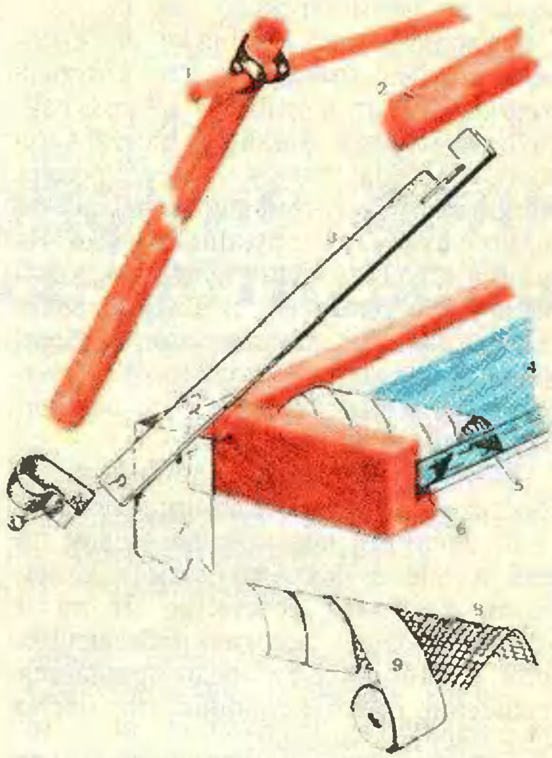


Рис. 3. Детали держателей ванны и волнового поглотителя.

1 — держатель источника света; *2* — держатель бруска с моторчиком; *3* — металлический кронштейн; *4* — вода; *5* — стекло; *6* — мастика; *7* — алюминиевые стойки; *8* — поглотитель волн; *9* — бинт, намотанный на сетку.

и звуковых волн изменяется в зависимости от плотности среды.

Отражение в месте перехода с глубокой воды на мелкую можно умень-

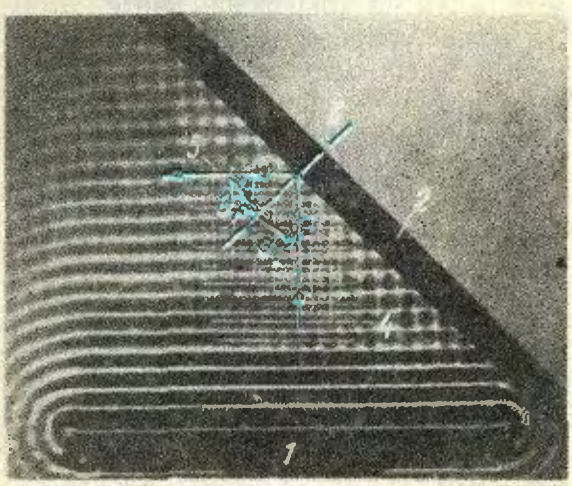


Рис. 4. Отражение волн.

1 — источник волн; *2* — отражатель; *3* — перпендикуляр к отражателю; *4* — прямые волны; *5* — отраженные волны.

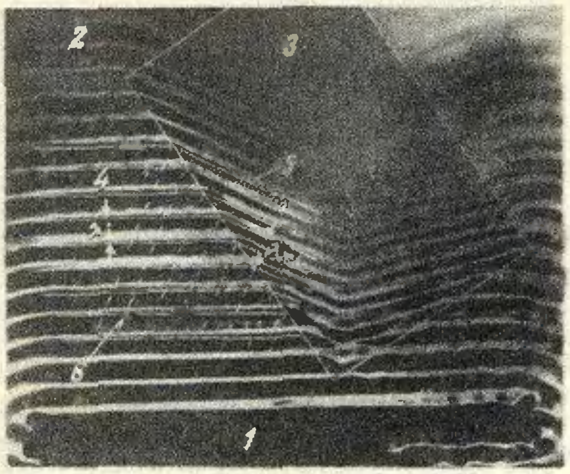


Рис. 5. Преломление волн.
1 — источник волн; *2* — глубокая вода; *3* — мелкая вода; *4* — прямые волны; *5* — преломленные волны; *6* — отраженные волны.

шить, заточив край стекла (рис. 6), но нельзя устранить совсем.

Энергию волн можно сфокусировать, рассеять или как-то распределить барьерами различной формы. Это делается параболическими рефлекторами в телескопах, прожекторах, радарах и даже раковинах оркестра. Фокусировку волн можно воспроизвести в волновой ванне. Сделайте барьер из парафина или резиновой трубки в форме параболы

Рис. 6.

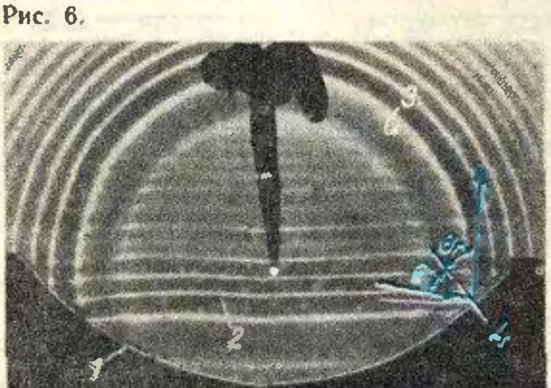


Рис. 7. Отражение от параболического барьера.
1 — параболический отражатель; *2* — прямые волны; 3 — отраженные волны; *4* — нормаль к параболическому отражателю.

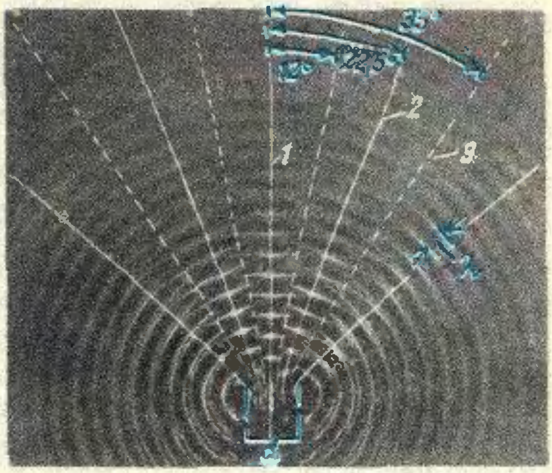


Рис. 8. Интерференция волн.
1 — центральный максимум; *2* — радиальный максимум; *3* — узел.

и направьте на него плоские волны. От любой точки барьера отраженные волны пойдут к одной и той же точке — фокусу параболы. Наоборот, круговая волна, возникающая в фокусе, отражаясь от параболического барьера, становится плоской (рис. 7). (В этом опыте волна создается каплей воды из пипетки, контуры которой видны на фотографии.)

Волны от двух и более источников распространяются в однородной среде независимо друг от друга, хотя волновая энергия в любой точке среды в каждый момент равна сумме энергий всех волн, пришедших в эту точку. Если совпадают гребни волн от двух источников, амплитуды волн складываются; если же гребень одной волны совпадает с впадиной другой волны той же амплитуды, то волны взаимно уничтожаются. Это явление называется интерференцией волн.

Интерференцию можно воспроизвести в волновой ванне, установив два шарика так, чтобы они касались воды на расстоянии 5 *см* друг от друга. На рисунке 8 приведена типичная картина интерференции волн, создаваемых двумя шариками. Максимум амплитуды возникает там, где совпадают гребни волн, а узлы — там, где гребни совпадают с впадинами. Легко вычислить углы, при которых возникают максимумы и узлы. Синус угла для максимума равен $n\lambda/d$, где n — номер максимума (центральный максимум, перпендикулярный линии, соединяющей источники, имеет «нулевой» номер, а радиальные максимумы, расположенные по обе стороны от центрального максимума, имеют последовательно номера «первый», «второй», «третий» и т. д.), λ — длина волны и d — расстояние между источниками. Аналогично, узлы лежат на луче, определяемом уравнением $\sin\theta = (m - 1/2)\lambda/d$. Здесь m — номер узла.

Барьеры не обязательно должны быть сплошными. Решетка из равномерно расположенных штифтов также отражает волны (рис. 9). Когда плоские волны последовательно наталкиваются на решетку, от каждого

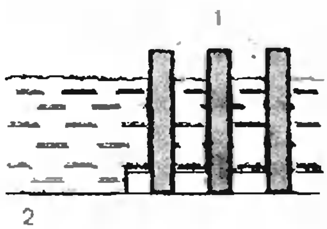


Рис. 9. Поперечное сечение решетки из штифтов.
1 — **штифты;** *2* — **основание решетки из пластика.**

штифта расходятся круговые волны, которые интерферируют и снова образуют плоские волны. Направление, соответствующее наибольшей амплитуде этих волн, составляет с рядами, образующими решетку, угол θ, для которого $\sin\theta = n\lambda/2d$. $\sin\theta_{max}$ даст направление наибольшей амплитуды волн, n — целое число, λ — длина волны, d — расстояние между соседними рядами решетки (период решетки) (рис. 10). Это соотношение называют формулой Брэгга — Вульфа.

С помощью волновой ванны можно исследовать эффект Доплера *). Доплер обнаружил, что повышение тона свистка у быстро приближающегося поезда и смещение цвета движущейся

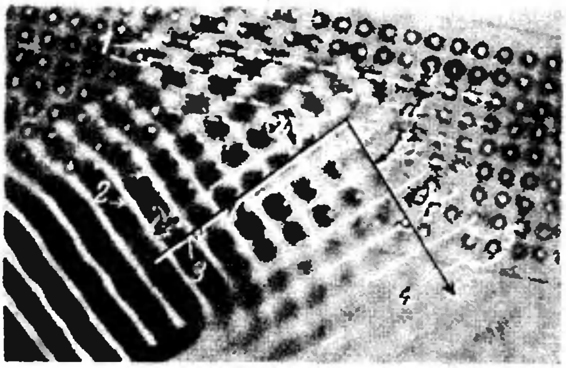


Рис. 10. Отражение от решетки.
1 — **ряды штифтов;** *2* — **фронт прямых волн;** *3* — **направление распространения прямых волн;** *4* — **направление распространения отраженных волн;** *5* — **фронт отраженных волн.**

к земле звезды в сторону синей части спектра — явления одной природы. Оба явления обусловлены тем, что движущиеся источники волн могут догонять, а иногда и перегонять испускаемые ими волны. Чтобы продемонстрировать эффект Доплера в ванне, возьмите небольшую трубочку, которая с помощью мембраны, приводимой в действие соленоидом, направляет в ванну через равные промежутки времени порции воздуха, одновременно двигаясь по ванне с заданной скоростью. (Можно смонтировать у края ванны несколько участков игрушечной железной дороги и установить трубочку в игрушечном вагончике). Когда трубочка перемещается со скоростью, меньшей скорости волн, гребни перед ней располагаются более часто, а позади — более редко.

Эффект Доплера наблюдается в различного рода волнах, в том числе радиоволнах. Пользуясь сравнительно несложной аппаратурой, можно по радиосигналам искусственного спутника, учитывая эффект Доплера, определить величину и направление скорости спутника.

Все эти эксперименты — лишь немногое из того, что можно проделать с помощью несложных приспособлений в волновой ванне. Каждый, кто построит и оборудует такую ванну, убедится, что интересных опытов хватит не на один непогожий день.

*) Более подробно об эффекте Доплера рассказывается в статье Л. Г. Асламазова «Эффект Доплера», «Квант» № 4, 1971.

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Решения задач можно посылать не позднее чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера журнала по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете; например, «Задачник «Кванта», М137, Ф139. В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь).

Звездочкой отмечены более трудные задачи.

ЗАДАЧИ

М141. Выберем на высоте BH треугольника ABC произвольную точку P. Пусть K — точка пересечения прямых AP и BC, L — точка пересечения прямых CP и AB. Докажите, что отрезки KH и LH составляют равные углы с высотой BH.

Е. В. Саллинен

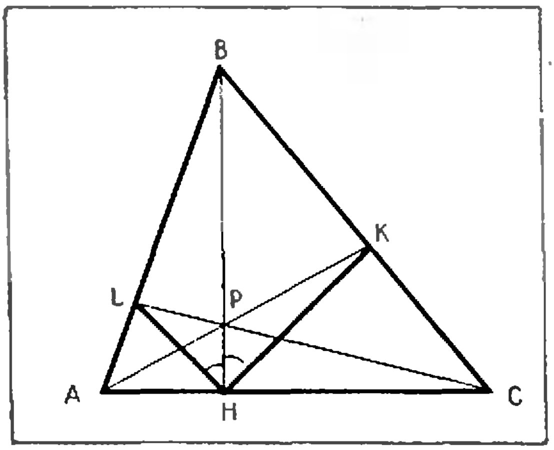


Рис. 1.

М142. а) Докажите, что нельзя занумеровать ребра куба числами 1,2,...,12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трех выходящих из нее ребер была одной и той же.

б)* Можно ли вычеркнуть одно из чисел 1,2,...,12, 13 и оставшимися занумеровать ребра куба так, чтобы выполнялось то же условие?

Н. Н. Константинов, Н. Б. Васильев

М143. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого выполняется следующее условие: если n делится на $p-1$ и p простое, то n делится на p.

М144. Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a, b, α, β, чтобы прямоугольник $a\times b$ можно было разрезать на несколько прямоугольников $\alpha\times\beta$.

Например, можно ли прямоугольник 50×60 разрезать на прямоугольники размерами:

а) 20×15; б) 5×8; в) $6{,}25\times15$; г) $(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})$.

А. Т. Колотов

М145. A обещает платить B в среднем $\sqrt{2}$ руб. в день. Они условились, что в n-й день A будет получать целое число a_n рублей (a_n равно 1 или 2) с таким расчетом, чтобы сумма, полученная за первые n дней ($a_1+a_2+\ldots+a_n$), была как можно ближе к числу $n\sqrt{2}$.

Например, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1$, $a_4=2$, $a_5=1$. Докажите, что последовательность a_1, a_2, a_3, ... непериодическая.

А. К. Толпыго

Ф153. Почему реки, текущие даже по совершенно плоской однородной почве, изгибаются?

Для простоты рассмотрите реку, текущую вдоль экватора.

Ф154. Оцените, сколько капелек воды имеется в 1 $м^3$ тумана, если видимость составляет 10 $м$ и туман оседает через 2 часа? Высота слоя тумана 200 $м$.

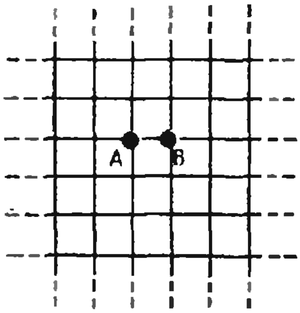


Рис. 2.

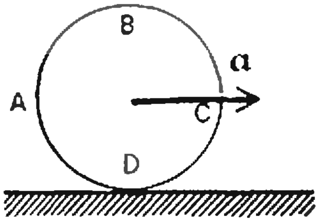


Рис. 3.

Сила сопротивления воздуха, действующая на каплю воды радиуса R (*м*), движущуюся со скоростью v (*м/сек*), равна $4{,}3Rv$(*н*).

П. Л. Капица

Ф155. Один моль газа сжимают так, что его объем во время процесса сжатия пропорционален давлению $V=\alpha P$. Давление газа увеличивается от P_1 до P_2. Найти коэффициент α, если теплоемкость этого газа при постоянном объеме равна c_V и во время процесса газу сообщается количество тепла Q.

И. Ш. Слободецкий

Ф156*. Имеется бесконечная проволочная сетка с прямоугольной ячейкой. Сопротивление каждой из проволок, составляющих ячейку сетки, равно r. Найти сопротивление сетки между точками A и B (рис. 2).

Ф157. По плоскости катится обруч. Ускорение центра обруча равно a. Найти ускорение точек A, B, C и D обруча (рис. 3) через время t после начала его движения, если начальная скорость центра обруча равна v_0 и обруч не проскальзывает.

О ЧИСЛЕ «пи»

Читатель нашего журнала Л. Вейдеман (из г. Риги) обратился в «Квант» с вопросом: «В книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения...» на стр. 418 написано: «Отношение длины окружности к ее диаметру, которое древние греки обозначили буквой π («пи»)...».

В книге «Алгебра и элементарные функции» (учебное пособие для средней школы)... член редколлегии «Кванта» профессор А. И. Маркушевич на стр. 278—279 пишет, что «Впервые это обозначение встречается в книге английского математика В. Джонса (1706)». Кому же верить?»

Нам кажется, что ответ на этот вопрос будет интересен многим нашим читателям. Ниже мы помещаем текст ответа профессора А. И. Маркушевича.

Уважаемый тов. Вейдеман!

К сожалению, авторы (да и редакторы) научно-популярных книг далеко не всегда являются знатоками истории науки, и поэтому в этих книгах можно встретить устаревшие, а иногда и просто ошибочные утверждения исторического характера. Именно так обстоит дело с книгой Гарднера. Древние греки, не знавшие современных цифр, обозначали числа (целые положительные) буквами своего алфавита. В частности, буква π (с добавочной черточкой наверху) обозначала число 80 и только это число, что, очевидно, не имеет ничего общего с отношением длины окружности к диаметру. Но π является также и первой буквой греческого слова περιφέρια, означающего окружность (отсюда наше: периферия). Неудивительно, что ряд английских математиков XVII века (но не раньше!) использовали букву π для обозначения длины самой окружности (произвольного радиуса). Впервые в истории математики эта буква была употреблена для обозначения отвлеченного числа 3,1415... в сочинении *Synopsis Palmariorum Matheseos* английского преподавателя математики Вильяма Джонса в 1706 году. Всеобщее распространение это обозначение получило только благодаря трудам Эйлера (начиная с 1737 г.), пришедшего к этому, скорее всего, независимо от Джонса.

Прочесть обо всем этом можно в классическом сочинении Д. Е. Смита (*History of mathematics by D. Smith, vol.* II, *New York*, 1958, *p*. 312), или — в виде краткой ссылки — в советском коллективном труде: «История математики», том второй, М., изд-во «Наука», 1970, стр. 61.

А. И. Маркушевич

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач M101—M105.

M101

В колонию, состоящую из n бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся, и так далее.

Будет ли эта колония жить бесконечно долго или в конце концов погибнет?

Легко проверить, что количество бактерий и вирусов будет меняться со временем по следующему закону:

Время (минуты)	Кол-во вирусов	Кол-во бактерий
0	1	n
1	2	$2(n-1)$
2	2^2	$2^2(n-2)$
3	2^3	$2^3(n-3)$
...	...	...
t	2^t	$2^t(n-t)$
$t+1$	2^{t+1}	$2^{t+1}(n-t-1)$
...	...	...

Отсюда ясно, что при $t=n$ количество бактерий обратится в нуль — колония погибнет.

Мы получили около 80 писем с решением этой задачи и одно письмо, где был дан неверный ответ.

M102

Множество на плоскости, состоящее из конечного числа точек, обладает следующим свойством: для любых двух точек A и B множества найдется точка C множества такая, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество?

Докажем, что такое множество может содержать только три точки (разумеется, предполагая, что оно содержит более одной).

Обозначим это множество буквой Γ.

Пусть A и B — две точки множества Γ, расстояние между которыми наибольшее. По условию, Γ содержит такую точку C, что треугольник ABC равносторонний: $AB=BC=AC=d$.

Пусть P — еще одна точка, принадлежащая множеству Γ. Поскольку расстояние между точками P и A не превосходит d, точка P должна лежать внутри круга радиуса d с центром A. Точно так же она должна лежать и внутри кругов радиуса d с центрами B и C. Таким образом, множество Γ не выходит за пределы общей части этих трех кругов — криволинейного «треугольника» T (рис. 1).

Далее, вместе с точками P и A множеству Γ должна принадлежать одна из двух точек Q и R — вершин равносторонних треугольников APQ и APR, то есть точек, получающихся из P поворотом на 60° (в ту или другую сторону) вокруг A (рис. 2). Для того чтобы точка Q лежала внутри T, нужно, чтобы точка P лежала в пределах голубого «лепестка» AB; действительно, если повернуть треугольник T вокруг точки A на 60° против часовой стрелки, то точки лепестка AB и только они не выйдут за пределы

T. Точно так же, для того чтобы точка R лежала внутри T, нужно, чтобы точка P лежала в пределах голубого «лепестка» AC. Итак, мы доказали, что любая точка P множества Γ должна лежать в пределах множества T_A, состоящего из двух голубых лепестков AB и AC с общей вершиной A. Но точно так же доказывается, что Γ заключено в пределах множества T_B (рис. 3) и T_C (рис. 4), а общая часть трех множеств T_A, T_B и T_C состоит только из трех точек A, B и C. Следовательно, никакая другая точка P не может принадлежать множеству Γ.

Правильное решение задачи прислали *А. Блохин* (Климовск Кемеровской обл.), *Н. Чернов* (Кривой Рог), *Ш. Слепой* и *Э. Туркевич* (Черновцы), *А. Меркурьев* (Ленинград), *М. Розов* (Минск), *А. Глушко* и *В. Корниенко* (Воронеж) и другие.

В нашем решении мы пользовались только тем, что в множестве Γ можно указать две точки, расстояние между которыми максимально. Для множества Γ, состоящего из конечного числа точек, это, разумеется, так. Однако утверждение задачи остается верным, если наложить на множество Γ более слабое условие — условие ограниченности. Для решения задачи в этом случае необходимы дополнительные рассуждения: их без труда смогут провести те, кто владеет первоначальными понятиями топологии точечных множеств на плоскости, например, в объеме книги: Н. Стинрод и У. Чинн «Первые понятия топологии» («Мир», популярная серия «Современная математика»). Заметим, что от условия ограниченности отказаться уже нельзя.

М103

Исследуйте, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=a, \\ x^2-y^2=b, \end{cases}$$

где a и b — некоторые действительные числа.

Перейдем к новым переменным по формулам

$$\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2}, \\ y=\dfrac{u-v}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Тогда данная в условии система запишется так:

$$\begin{cases} 3u^2+v^2=4a, \\ uv=b. \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, что каждой паре (x, y) соответствует по формулам (1) одна пара (u, v), а каждой паре (u, v) — пара (x, y), так что нам нужно выяснить, сколько решений (u, v) при различных значениях параметров a и b имеет система (2). (Сразу ясно, что при $a<0$ решений нет, при $a=0$ и $b\neq 0$ — тоже, а при $a=b=0$ — единственное решение $u=v=0$, но это можно было бы и не отмечать, поскольку наше дальнейшее рассуждение годится и для этих случаев.)

Вычтем и прибавим к первому уравнению системы (2) второе уравнение, умноженное на $2\sqrt{3}$.

Получим такую систему:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}u-v)^2=4a-2\sqrt{3}b, \\ (\sqrt{3}u+v)^2=4a+2\sqrt{3}b \end{cases} \qquad (3)$$

равносильную системе (2). [Подумайте, как из (3) вывести (2)]. Ясно, что каждому набору значений $\sqrt{3}u-v$ и $\sqrt{3}u+v$, который получается из (3), соответствует одно решение (u, v) системы. Остается учесть, что (в области действительных чисел) уравнение $z^2=c$ имеет два решения: $z_1=\sqrt{c}$, $z_2=-\sqrt{c}$, если $c>0$, одно $z=0$, если $c=0$, и не имеет решений, если $c<0$.

Ответ. Решения есть тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$-2a\leq b\sqrt{3}\leq 2a.$$

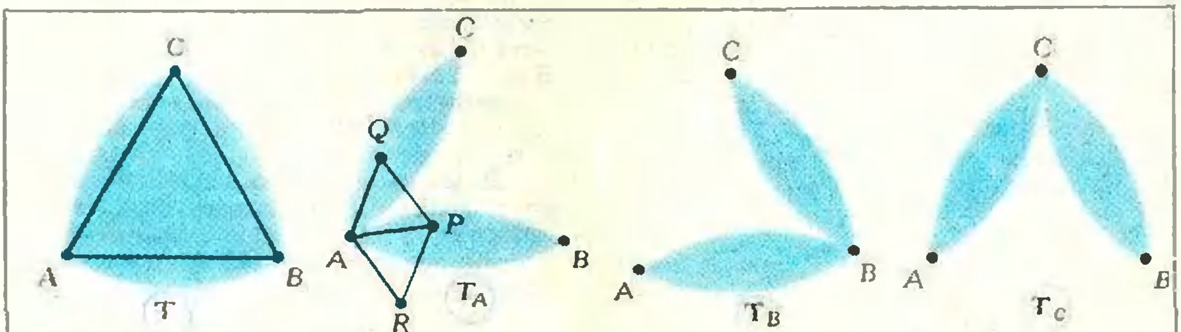


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

На рисунках 1—4 области, окрашенные в голубой цвет, ограничены дугами окружностей радиуса $d=AB$ с центрами в точках A, B или C. Проверьте, что эти области пересекаются лишь в точках A, B и C.

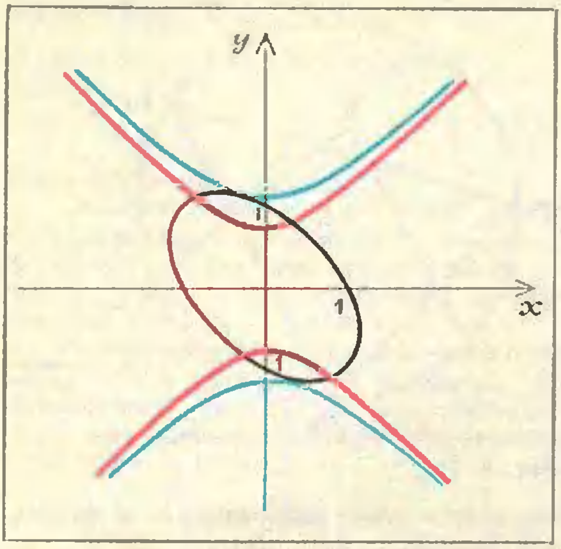


Рис. 5. Поворотом на 45° по часовой стрелке из этого рисунка получается рисунок 6 (но в другом масштабе).

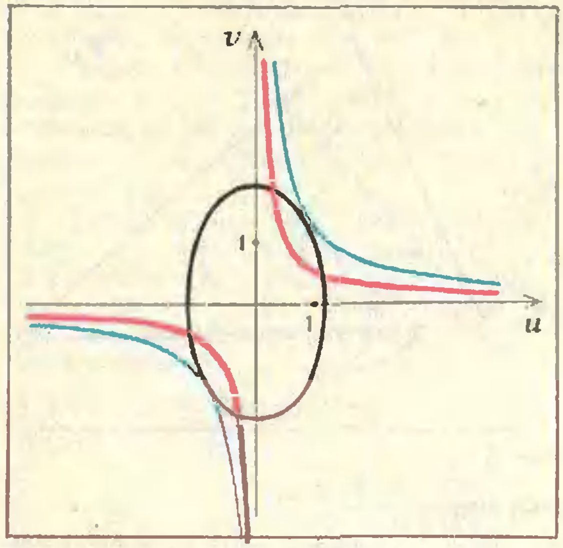


Рис. 6. График гиперболы, заданной уравнением $uv = 1/2$ окрашен в красный цвет, гиперболы с уравнением $uv = 2/\sqrt{3}$ — в синий. Черным цветом отмечен эллипс, уравнение которого $3u^2 + v^2 = 4$.

причем, если оба неравенства строгие («меньше»), то решений четыре; если одно из них обращается в равенство — то два, если оба (это возможно лишь при $a = b = 0$), то одно.

Многие читатели, приславшие решения этой задачи, приводят (как правило, в несколько иной форме) этот результат, а также явные формулы для решений системы. Их нетрудно получить из наших выкладок, но они довольно громоздки, и мы не будем их приводить, тем более, что это и не требуется в условии. Вместо этого укажем на геометрическую интерпретацию уравнений системы: первое задает эллипс, второе — гиперболу. Красная гипербола на рисунках 5 и 6 соответствует таким значениям параметров a и b, когда кривые пересекаются (четыре решения), голубые — когда гипербола касается эллипса (два решения).

Некоторые читатели провели исследование и для того случая, когда система решается в области всех комплексных чисел. И здесь наше рассуждение позволяет сразу дать ответ: в комплексных числах (x, y) система имеет четыре, два или одно решение, если из двух равенств $2a = b\sqrt{3}$, $2a = -b\sqrt{3}$ соответственно нуль, одно или два верных.

М104

Внутри треугольника ABC лежат такие две точки P и Q, что отрезки AP и AQ составляют равные углы с биссектрисой угла A треугольника, а отрезки BP и BQ составляют равные углы с биссектрисой угла B.

Докажите, что отрезки CP и CQ составляют равные углы с биссектрисой угла C (рис. 7).

Пусть A, B и C — углы при соответствующих вершинах треугольника ABC. По условию $\angle PAC = \angle QAB = \alpha$, $\angle PBA = \angle QBC = \beta$. Мы должны доказать равенство углов $\angle PCA = \gamma_1$ и $\angle QCB = \gamma_2$.

Приведем решение *Э. Туркевича*, использующее теорему синусов; близкое к этому решение прислали *С. Лягушин* (Днепропетровск), *Ю. Кисин* (Старая Русса), *С. Цанава* (Кутаиси), *М. Илларионов*, *А. Глушко* и *В. Корниенко* (Воронеж), *М. Розов* и *А. Черняк* (Минск).

Перемножив равенства

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin\beta}{\sin(A-\alpha)}; \quad \frac{CP}{AP} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1};$$

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\sin(C-\gamma_1)}{\sin(B-\beta)}; \quad \frac{AQ}{BQ} = \frac{\sin(B-\beta)}{\sin\alpha};$$

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(C-\gamma_2)}; \quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta},$$

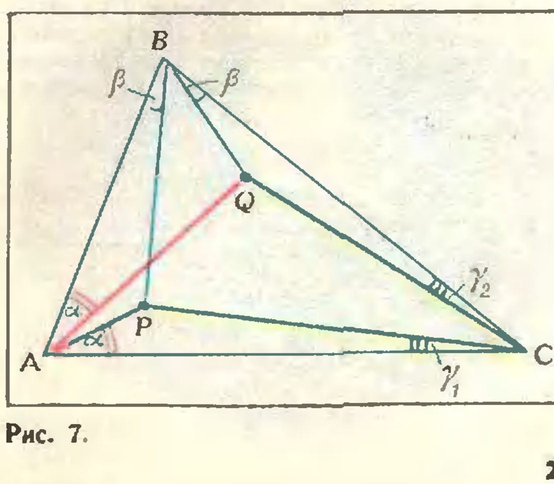


Рис. 7.

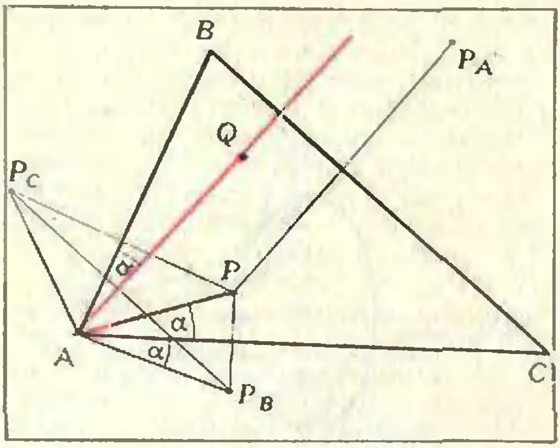


Рис. 8.

получим

$$\sin(C-\gamma_1)\sin\gamma_2=\sin(C-\gamma_2)\sin\gamma_1 \text{ или}$$
$$\sin C\ \sin(\gamma_1-\gamma_2)=0.$$

Поскольку $0<C<\pi$ и $-\pi<\gamma_1-\gamma_2<\pi$, отсюда следует, что $\gamma_1=\gamma_2$.

В. Н. Березин (Москва) сообщил другое, чисто геометрическое решение.

Пусть P_A, P_B и P_C — точки, симметричные точке P относительно сторон BC, AC AB треугольника ABC. Заметим, что для того, чтобы отрезок AQ составлял с отрезками AB и AC углы, равные $\measuredangle PAC=\alpha$ и $\measuredangle PAB=A-\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы он шел по биссектрисе угла P_BAP_C (рис. 8). Поскольку $AP_B=AP_C$, это условие можно сформулировать еще так: точка Q должна лежать на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка P_BP_C. Теперь осталось доказать, что если Q лежит на перпендикулярах, проведенных через середину отрезков P_BP_C и P_CP_A, то Q лежит также на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка P_BP_C. Это очевидно: точки P_A, P_B, P_C не лежат на одной прямой, и Q является центром круга, описанного около треугольника $P_AP_BP_C$ (рис. 9).

Разумеется, точно так же можно доказать, что P — центр круга, описанного около треугольника $Q_AQ_BQ_C$, где Q_A, Q_B, Q_C — точки, симметричные Q относительно сторон треугольника BC, CA, AB. Отображение $P\to Q$ совпадает с обратным к нему. При этом отображении центр вписанного круга переходит в себя, а центр описанного круга и точка пересечения высот — друг в друга (проверьте это!).

M105

Сумма цифр числа после его умножения на 8 может уменьшиться: $75\cdot 8=600$ — сумма цифр была $7+5=12$, а стала 6. Однако она не может уменьшиться более, чем в 8 раз. Докажите это.

Другими словами, докажите, что для любого натурального числа N

$$\frac{S(8N)}{S(N)}\geqslant\frac{1}{8},$$

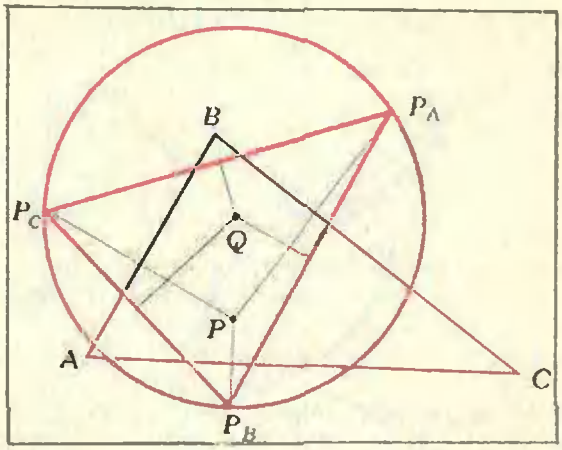


Рис. 9.

где $S(A)$ — сумма цифр числа A (в десятичной записи).

Для каких еще натуральных k существует такое положительное число c_k, что для всех натуральных N

$$\frac{S(kN)}{S(N)}\geqslant c_k?$$

Найдите наибольшее подходящее значение c_k.

Сначала заметим, что $S(8\cdot 125)=S(1000)=1$.

Нам будут нужны следующие свойства функции $S(N)$:

1°. $S(A+B)\leqslant S(A)+S(B)$;

2°. $S(A_1+A_2+\ldots+A_n)\leqslant S(A_1)+S(A_2)+\ldots+S(A_n)$;

3°. $S(nA)\leqslant nS(A)$;

4°. $S(AB)\leqslant S(A)S(B)$.

Чтобы убедиться в справедливости свойства 1°, достаточно представить себе, что числа A и B складываются «столбиком». Свойство 2° получается из 1° простой индукцией. 3° — частный случай 2°.

Если представить себе, что A множится на B «столбиком» и к каждой цифре числа B применить 3°, то получится 4°.

Теперь легко доказать требуемое неравенство: $S(N)=S(1000N)=S(125\cdot 8N)\leqslant S(125)S(8N)=8S(8N)$, то есть

$$\frac{S(8N)}{S(N)}\geqslant\frac{1}{8}.$$

То же рассуждение годится для любого числа $k=2^p5^q$. Обозначим через c_k число $\dfrac{1}{S(2^q5^r)}$. Докажем, что для любого N $\dfrac{S(kN)}{S(N)}\geqslant c_k$ (при $N=2^q5^r$ это неравенство превращается в равенство, поскольку

$S(kN)=S(10^{r+q})=1$). Для любого N

$$S(N)=S(10^{r+q}N)\leqslant S(2^q5^r)\,S(kN)=$$

$$=\frac{1}{c_k}\,S(kN),$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что для чисел k вида $Q2^r5^q$, где Q взаимно просто с 10, отношение $S(KN)/S(N)$ может быть меньше любого заданного $\varepsilon>0$, то есть требуемого положительного числа c_k не существует.

Нам потребуется такая лемма: существует число 10^m-1 (состоящее из m девяток), делящееся на Q. Ее легко доказать с помощью «принципа Дирихле» *). Рассмотрим остатки от деления на Q чисел

9
99
999
9999
...

Какие-то два из них совпадают, и разность соответствующих чисел делится на Q: нули в конце этой разности можно отбросить (поскольку Q взаимно просто с 10).

*) См. статью А. И. Орлова в «Кванте» № 7, 1971.

Пусть $10^m-1=QR$ и n — любое натуральное число. Тогда $10^{mn}-1$ — число, состоящее из mn девяток,— делится на Q и частное $R_n=R(10^{m(n-1)}+10^{m(n-2)}+\ldots$ $\ldots+10^m+1)$.

Теперь заметим, что у числа $Q(R_n+1)=$ $=QR_n+Q=10^{mn}+Q-1$ сумма цифр при любом n равна $S(Q)$, а сумма цифр числа R_n+1 не меньше $(n-1)S(R)$. Таким образом, выбрав n достаточно большим и взяв $N=R_n+1$, мы получим, что

$$\frac{S(kN)}{S(N)}=\frac{S((R_n+1)\,Q2^r5^q)}{S(R_n+1)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{S(2^r5^q)\,S(Q)}{(n-1)\,S(R)}<\varepsilon.$$

Итак, мы доказали, что при $k=2^r5^q$ искомое число c_k существует и равно $\dfrac{1}{S(2^q5^r)}$, а при других k такого положительного c_k не существует. Правильные ответы прислали *Э. Туркевич, М. Илларионов, М. Розов.*

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф116—Ф122.

Ф116

Если температура воздуха в цилиндре, показанном на рисунке 10, равна T_0 ($T_0>$ $>0^\circ$ С), то он остывает до температуры $\dfrac{T_0}{2}$ примерно за время $\tau=30$ *сек*. Поршень начинают вдвигать и выдвигать с некоторой частотой. В каком случае растает больше льда, окружающего цилиндр, за 50 ходов поршня, если они сделаны: а) за 1 минуту; б) за 1 час; в) за 30 суток?

Скорость изменения температуры воздуха в цилиндре пропорциональна самой температуре. Это означает, что изменение температуры идет по экспоненте $T=T_0e^{-\alpha t}$ (α — коэффициент, t — время) (см. «Квант» № 1). Очевидно, если выбранные интервалы времени t составляют арифметическую прогрессию с разностью τ, то есть $t=n\tau$, то температура газа составляет геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-\alpha\tau}$. В этом нетрудно убедиться, записав формулу зависимости температуры газа от времени в виде $\dfrac{T}{T_0}=\left(e^{-\alpha\tau}\right)^n$. При $n=1$ $\dfrac{T}{T_0}=\dfrac{1}{2}$. Это означает, что $e^{-\alpha\tau}=\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{T}{T_0}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Отсюда следует, что в сосуде с неподвижным поршнем температура газа каждые 30 секунд будет уменьшаться вдвое.

Если поршень делает 50 ходов за 1 минуту, то один ход поршня делается за 1,2 секунды. Это время мало по сравнению с характерным временем процесса теплопередачи — 30 секундами. Поэтому тепло, выделяющееся при уменьшении объема газа, не успевает рассеяться и практически полностью будет отбираться при увеличении объе-

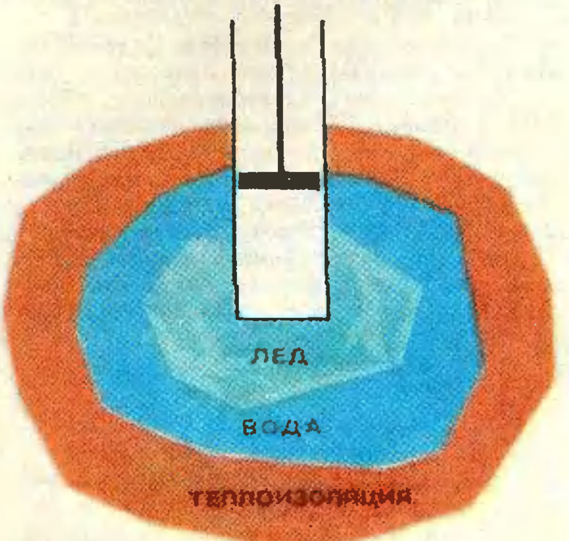


Рис. 10.

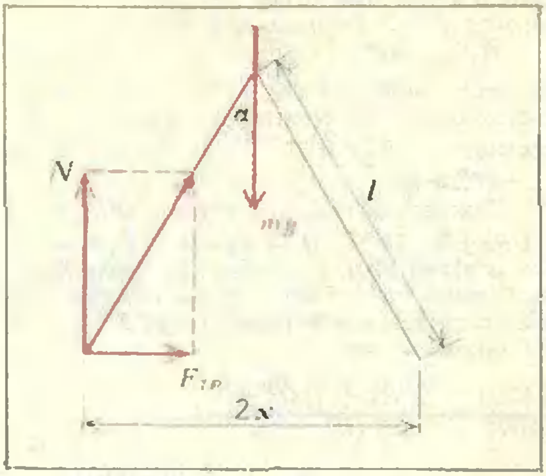


Рис. 11.

ма газа. Следовательно, в этом случае движение поршня не изменит скорости таяния льда.

Ясно также, что и при 50 ходах поршня за 30 суток лед будет таять так же, как он таял бы при неподвижном поршне. Теперь время одного хода поршня слишком велико по сравнению с тем временем, за которое растает практически весь лед и температура воды станет равной 0° С.

Если поршень делает 50 ходов за 1 час, то один ход делается за 1,2 минуты. Благодаря этому тепло, выделившееся при сжатии газа, успеет пойти на таяние льда. В этом случае льда растает больше, чем при неподвижном поршне.

Правильное решение этой задачи прислали *М. Флеров* (Москва) и *М. Вайнмахер* (Кривой Рог).

Ф117

По обледенелой дороге обычно идут, делая маленькие шаги. С какой шириной шага должен идти человек, не боясь упасть, если длина его ног равна 1 метру, а коэффициент трения подошв обуви о дорогу равен 0,1?

Пусть ширина шага равна $2x$ (рис. 11). Когда человек поднимает одну ногу, весь его вес приходится на вторую ногу. Тогда сила N реакции земли равна mg (m — масса человека). Это означает, что максимальная сила трения $F_{тр}$, которая может действовать на ногу человека, не давая ей скользить, равна kmg. Равнодействующая силы N и силы трения $F_{тр}$ направлена к центру тяжести человека, то есть практически вдоль ноги, и образует с вертикалью угол α:

$$\frac{F_{тр}}{N} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{kmg}{mg} = k,$$

но

$$\sin\alpha = \frac{x}{l}.$$

Следовательно,

$$x = l\sin\alpha = l\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx 0,1l = 10\ (см).$$

Ширина шага, который может сделать пешеход, равна 20 *см*.

Эта задача оказалась самой легкой. Ее правильное решение прислали более 50 читателей.

Ф118

В камеру сгорания ракетного реактивного двигателя поступает в секунду масса m водорода и необходимое для полного сгорания количество кислорода. Выходное сечение сопла S. Давление в этом сечении P, абсолютная температура T. Определить силу F тяги двигателя.

Найдем массу водяных паров, образующихся при сгорании массы m водорода. Запишем уравнение реакции горения водорода

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O.$$

Из уравнения реакции можно заключить, что две молекулы водорода соединяются с одной молекулой кислорода. В результате получается две молекулы водяных паров. Это означает, что для сгорания одного киломоля водорода необходима половина киломоля кислорода, и в результате реакции получается один киломоль воды. При сгорании $n = \frac{m}{\mu_в}$ киломолей водорода получится столько же киломолей водяных паров ($\mu_в = 2$ *кг/кмоль* — масса одного киломоля водорода). Поэтому при сгорании массы m водорода получается масса $M = \frac{m}{\mu_в}\mu_п = \frac{18}{2}m = 9m$ водяных паров ($\mu_п = 18$ *кг/кмоль* — масса одного киломоля пара). Эта масса водяных паров вылетает из сопла двигателя за одну секунду. Так как нам известна площадь выходного сопла двигателя, можно найти скорость v газа, выходящего из сопла. За одну секунду из сопла двигателя будет выброшен объем пара $V = vS$. Если плотность пара равна ρ, то масса этого объема пара будет равна $vS\rho$, поэтому $M = \rho S v$.

Отсюда $\quad v = \frac{M}{\rho S} = \frac{9m}{\rho S}.$

В эту формулу входит плотность пара. Она нам не известна, зато мы знаем давление пара и его температуру. Записав уравнение Клапейрона—Менделеева $PV = \frac{m}{\mu_п}RT$ (R — газовая постоянная), найдем, что плотность пара равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu_п}{RT} \text{ и } v = \frac{9mRT}{P\mu_п S}.$$

Так как за время Δt из сопла ракеты выбрасывается масса пара $M\Delta t$, которой сообщается импульс $M\Delta t v$, то на газ действует сила

$$F_1 = \frac{M\Delta t v}{\Delta t} = Mv.$$

Такая же по величине сила, но направленная в противоположную сторону, действует на двигатель. Полная сила, действующая на двигатель (то есть сила тяги двигателя) равна сумме реактивной силы F_1 и силы статического давления $F_2 = pS$, то есть

$$F = Mv + pS = 81\frac{m^2RT}{p\mu_{\text{н}}S} + pS =$$

$$= \frac{9}{2}\frac{m^2RT}{pS} + pS.$$

Обычно сопла ракетных двигателей устроены так, что давление p газа, выходящего из сопла, мало́. Поэтому второй член в выражении для силы тяги двигателя мал по сравнению с первым и при расчетах им можно пренебречь.

Правильные решения прислали: *В. Куцек* (Ржев), *П. Сергеев* (Грозный), *Л. Смушкевич* (Магнитогорск), *И. Сидоров* (Москва), *С. Араслапова* (Н-Ивкино Кировской обл.), *Д. Фушман* (Черновцы), *Е. Долгов* (Москва), *Я. Итин* (Речица Гомельской обл.), *В. Катенов* (Москва), *Г. Симоненков* (Каунас), *В. Белов* (Вологда), *Н. Федин* (Омск), *М. Федин* (Алушта), *В. Кулич* (Иваново Брестской обл.), *С. Черников* (Семипалатинск), *В. Коротких* (Новокузнецк), *О. Заумыслова* (Москва), *Ю. Полянский* (Зеленодольск ТАССР), *А. Редченко* (с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл.), *С. Божевольный* (станица Копанская Краснодарского края), *Ю. Лурье* (Грозный), *Е. Шахнович* (Калинин. обл.), *Л. Брагинский* (Фрунзе), *Ю. Шаников* (Щигри Курской обл.), *А. Удальцов* (Калининград Московской обл.), *А. Гордиенко* (с. Полтавченское Краснодарского края), *Б. Бояршинов* (Коломна), *А. Смирнов* (Горький), *А. Мамула* (с. Дыбинцы Киевской обл.).

Ф119

К маятнику *AB* с шариком массы *M* подвешен маятник *BC* с шариком массы *m* (рис. 12). Точка *A* совершает колебания в горизонтальном направлении с периодом *T*. Найти длину нити *BC*, если известно, что нить *AB* все время остается в вертикальном положении.

Поскольку нить AB остается вертикальной, на шарик массы M во время движения системы не действуют горизонтальные силы. Это означает, что горизонтальные силы не действуют и на систему, состоящую из двух шариков, M и m, и шарики должны двигаться так, чтобы их центр масс не перемещался в горизонтальном направлении. Поэтому шарик массы m движется так, как будто он прикреплен к нити длины x, где x — расстояние от шарика до центра масс системы. Период колебаний такого маятника равен $2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$. Этот период, очевидно, равен периоду колебаний точки A, то есть T:

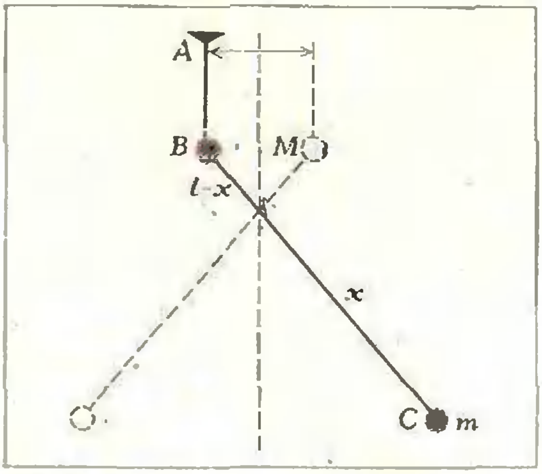


Рис. 12.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}. \qquad (1)$$

Найдем теперь x. Положение центра масс системы находится точно так же, как положение центра тяжести:

$$xm = (l - x)M.$$

Отсюда

$$x = l\frac{M}{m + M}.$$

Подставляя это выражение для x в формулу (1), получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cdot\frac{M}{m + M}}.$$

Отсюда

$$l = \frac{T^2g}{4\pi^2}\cdot\frac{m + M}{M}.$$

Правильное решение задачи прислали: *Л. Брагинский* (Фрунзе), *В. Коротких* (Новокузнецк), *М. Прегер* (Томск), *Н. Федин* (Омск), *Л. Смушкевич* (Магнитогорск), *Ю. Лурье* (Грозный), *П. Сергеев* (Грозный), *Е. Долгов* (Москва).

Ф120

Конькобежец по ледяной дорожке старается пройти вираж как можно ближе к внутренней бровке. Велосипедист на велотреке проходит вираж возможно дальше от внутренней бровки. Как разъяснить это различие в движении конькобежца и велосипедиста на вираже? Профиль трека изображен на рисунке 13.

Конькобежцу центростремительное ускорение сообщает сила трения о лед $F_{\text{тр}} = kN$, где N — сила нормального давления конькобежца на лед (рис. 14). Так как конькобежец не перемещается в вертикальном направлении, сила N равна по величине действующей на конькобежца силе тяжести mg. Поэтому $F_{тр} = kmg$ и $\frac{mv^2}{R} = kmg$.

Отсюда $v = \sqrt{kgR}$.

Делая поворот, конькобежец проходит расстояние πR. Время t, которое он затрачивает на поворот, равно

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{kg}}. \qquad (1)$$

Чем больше радиус окружности, по которой движется конькобежец, тем больше время, затрачиваемое на поворот. Хотя при увеличении радиуса поворота увеличивается максимальная скорость конькобежца, еще больше увеличивается проходимое им расстояние. Скорость пропорциональна $\sqrt{R}$, а расстояние — R. Именно поэтому конькобежец и старается пройти поворот как можно ближе к бровке.

Теперь рассмотрим движение велосипедиста на наклонном треке. Ему центростремительное ускорение сообщает сумма горизонтальных составляющих силы трения $F_{тр}$ и силы N реакции опоры (рис. 15):

$$F_{тр} \cos\alpha + N \sin\alpha = \frac{mv_1^2}{R}. \qquad (2)$$

Так как велосипедист не перемещается в вертикальном направлении, то сумма вертикальных составляющих всех сил, действующих на велосипедиста, равна нулю:

$$N \cos\alpha - F \sin\alpha - mg = 0. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3), учитывая, что $F_{тр} = kN$, найдем максимальную скорость, с которой может двигаться велосипедист:

$$v_1 = \sqrt{gR \frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{1 - k \operatorname{tg}\alpha}}.$$

Эта скорость зависит не только от радиуса окружности, но и от угла наклона трека к горизонту. При том профиле трека, который показан на рисунке, угол наклона меняется. При $\alpha = \operatorname{arctg}(1/k)$ скорость движения велосипедиста может быть любой *).

Время, необходимое велосипедисту для того, чтобы пройти поворот радиуса R, равно

$$t_1 = \frac{\pi R}{v_1} = \pi \sqrt{\frac{R}{g} \cdot \frac{1 - k \operatorname{tg}\alpha}{k + \operatorname{tg}\alpha}}.$$

Если велосипедист проходит поворот дальше от бровки, то меняется не только радиус поворота, но и угол α наклона трека к горизонту. Благодаря этому уменьшается время прохождения поворота.

Редакция получила много решений этой задачи. Наиболее полные и обоснованные решения прислали *Е. Долгов* (Москва), *В. Белов* (Вологда), *С. Божевольный* (станица Копанская Краснодарского края), *А. Герман* (Воронеж), *А. Бугай* (Изяслав Хмельницкой обл., УССР), *А. Боявский* (Гомель), *Д. Фушман* (Черновцы) и *П. Сергеев* (Грозный).

Ф121

В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массы M, в который вмерзла свинцовая дробинка массы m. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца $\rho_c = 11{,}3$ *г/см³*, плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ *г/см³*, теплота плавления льда $\lambda = 80$ *кал/г*. Температура воды в сосуде равна 0° С.

Для того чтобы дробинка начала тонуть, нет необходимости в том, чтобы растаял весь лед. Достаточно, если средняя плотность льда с дробинкой станет равна плотности воды. Если массу оставшегося при этом льда обозначить M_1, то условие того, что дробинка начнет тонуть, запишется так:

$$\frac{M_1 + m}{V} = \rho_в.$$

Но объем V льда и дробинки равен сумме их объемов, то есть $\frac{M_1}{\rho_л} + \frac{m}{\rho_c}$.

*) Скорость велосипедиста в этом случае будет определяться мощностью, развиваемой им, и силами сопротивления.

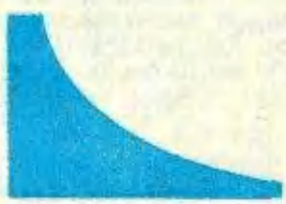


Рис. 13.

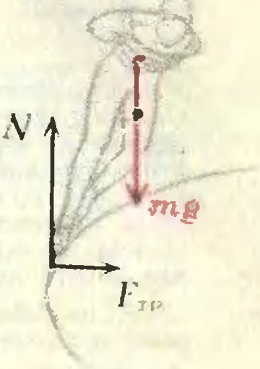


Рис. 14.

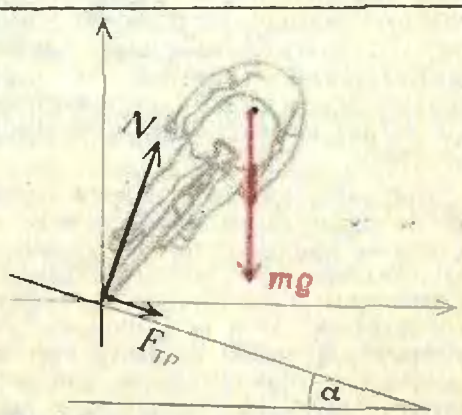


Рис. 15.

Поэтому $M_1 + m = \rho_в \left(\frac{M_1}{\rho_л} + \frac{m}{\rho_с}\right)$.

Отсюда

$$M_1 = m\,\frac{(\rho_с - \rho_в)\,\rho_л}{(\rho_в - \rho_л)\,\rho_с} = 8{,}2m.$$

Растаять должна масса льда

$$\Delta M = M - M_1 = M - 8{,}2m.$$

Для этого необходимо количество тепла

$$Q = \lambda\Delta M = \lambda(M - 8{,}2m).$$

Правильное решение этой задачи прислали около 40 читателей.

Ф122

Три тела с массами m_1, m_2 и m_3 могут скользить по горизонтальной плоскости без трения (рис. 16), причем $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$. Определить максимальные скорости, которые могут приобрести два крайних тела, если в начальный момент времени они покоились, а среднее тело имело скорость v. Удары считать абсолютно упругими.

Столкновения тела массы m_2 с телами массы m_1 и m_3 будут продолжаться до тех пор, пока его скорость не станет меньше скорости одного из тел m_1 или m_3. Но при этом импульс и энергия тела массы m_2 будет много меньше импульса и энергии этих тел (так как $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$) и, записывая закон сохранения энергии и импульса, мы можем не учитывать энергии и импульса

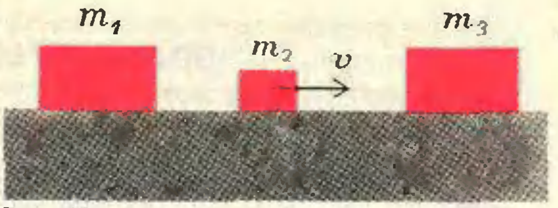


Рис. 16.

тела массы m_2 после прекращения столкновений. Обозначая u_1 и u_3 скорости тел m_1 и m_3 после того как прекратятся столкновения, мы можем записать:

$$m_3u_3 - m_1u_1 = m_2v,$$

$$\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_3u_3^2}{2} = \frac{m_2v^2}{2}.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем, что при $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$

$$u_1 = v\sqrt{\frac{m_2m_3}{m_1m_3 + m_1^2}},$$

$$u_3 = v\sqrt{\frac{m_1m_2}{m_3^2 + m_1m_3}}.$$

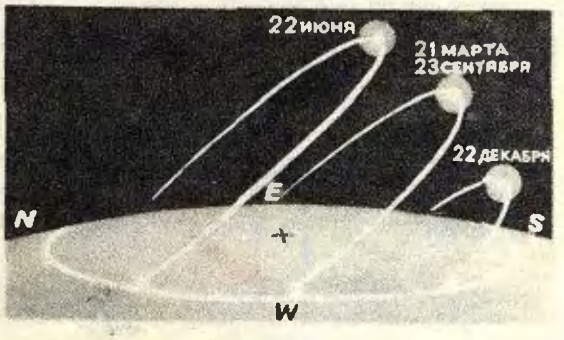
Правильные решения этой задачи прислали *Е. Долгов* (Москва), *А. Боявский* (Гомель), *В. Белов* (Вологда), *В. Терентьев* (Павлово Горьковской обл.), *П. Сергеев* (Грозный), *А. Редченко* (с. Новопетровка Сумской обл.).

И. Ш. Слободецкий

СОЛНЕЧНЫЕ ЧАСЫ

На первой странице обложки изображены солнечные часы. Их смастерил из серебра, платины и бронзы в 1620 году в Аугсбурге (Германия) француз Никола Руган. Со второй половины XVIII века такие портативные часы (диаметр кольца часов Ругана 100 мм) широко применялись для установления истинного солнечного времени и долготы места.

Игла, тень от которой падает на часовое кольцо, помещена в центре кольца перпендикулярно к его плоскости. В рабочем положении игла показывает на Полярную звезду, то есть располагается по оси мира. Кольцо снабжено часовыми делениями, следующими через каждые 15°. При настройке пластина — основание часов — с помощью приданных ей отвеса и компаса устанавливается в горизонтальной плоскости, так что стрелка компаса и игла оказываются в одной вертикальной плоскости (меридиональной). Затем с помощью лимба плоскость часового кольца поворачивается до рабочего положения. Тень тогда практически равномерно перемещается по шкале кольца, так как видимое суточное движение Солнца происходит равномерно по окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси мира, и располагается в пределах, указанных на рисунке.



Восьмиугольная пластина в основании часов на первой странице обложки содержит солнечный календарь.

В. Березин

Тригонометрические функции

Ж. М. Раббот

В этой статье мы рассмотрим некоторые вопросы тригонометрии, вызывающие затруднения у поступающих в вузы на вступительных экзаменах.

1. Тригонометрические функции числа

Что такое sin 1? *Какой знак имеет* ctg 21? Подобные вопросы часто ставят в тупик многих абитуриентов.

Мы хотим определить тригонометрические функции на множестве всех действительных (вещественных) чисел. Для этого рассмотрим на координатной плоскости круг единичного радиуса с центром в начале координат («тригонометрический круг»).

Пусть нам задано произвольное число t_0. Отложим на окружности тригонометрического круга от точки E (1; 0) (рис. 1) дугу длиной $|t_0|$ в положительном направлении (против часовой стрелки), если $t_0 \geqslant 0$, и в отрицательном направлении (по часовой стрелке), если $t_0 < 0$ (единицей длины служит радиус тригонометрического круга). При этом мы получим на окружности точку P_{t_0} с координатами (x_{t_0}, y_{t_0}). Абсцисса x_{t_0} точки P_{t_0} называется *косинусом числа* t_0, а ордината y_{t_0} этой точки — *синусом числа* t_0:

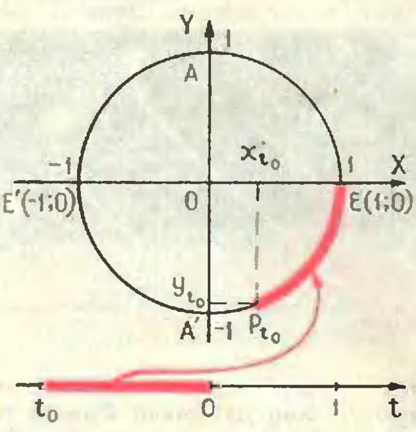


Рис. 1.

$$\boxed{\cos t_0 = x_{t_0}; \quad \sin t_0 = y_{t_0}.}$$

Наиболее тонкое место в нашем определении — процесс откладывания на окружности дуги данной длины. Его можно наглядно представлять себе как наматывание (без растяжения) отрезка на окружность.

Итак, чтобы получить, скажем, синус числа t_0, мы сначала сопоставили (с помощью наматывания) числу t_0 определенную точку P_{t_0} на окружности, а затем взяли ординату этой точки:

$$\boxed{t_0 \to P_{t_0}(x_{t_0}; \quad y_{t_0}) \to y_{t_0} = \sin t_0.}$$

Пользуясь нашим определением, мы можем изучить свойства функции $y = \sin t$. Покажем, как это делается.

а) Найдем корни уравнения $\sin t=0$. Пусть число t таково, что $\sin t=0$. Это означает, что ордината точки P_t, соответствующей числу t, равна нулю. Таких точек на единичной окружности две: E и E' (см. рис. 1). Они будут получаться при откладывании дуг, длины которых кратны длине полуокружности.

Заметив теперь, что половина длины единичной окружности равна π, мы получим, что равенство $\sin t=0$ равносильно равенству $t=\pi k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) Если числа t_1 и t_2 отличаются друг от друга на число, кратное 2π (то есть на целое число длин окружности), то соответствующие числам t_1 и t_2 точки единичной окружности совпадают. Это означает, что из равенства $t_1-t_2=2\pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) следует равенство $\sin t_1=\sin t_2$, то есть число 2π является периодом функции $y=\sin t$.

Докажем, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y=\sin t$. Предположим противное: пусть $0<a<2\pi$ и

$$\sin(t+a)=\sin t \tag{1}$$

при любом t (то есть нашлось положительное число a, меньшее 2π, которое тоже является периодом).

Пусть $t=0$. Тогда из (1) получим, что $\sin a=0$. Но в промежутке $0<a<2\pi$ есть лишь число π, синус которого равен нулю, поэтому $a=\pi$. Подставив теперь в (1) $t=\frac{\pi}{2}$, мы получим, что $1=-1$ $\left(\sin\frac{\pi}{2}=1\right.$ — это ордината точки A на рисунке 1, а $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-1$ — это ордината точки $\left.A'\right)$. Мы пришли к противоречию. Итак, 2π — наименьший положительный период функции $y=\sin t$.

Установленное нами свойство периодичности позволяет проводить дальнейшее исследование свойств синуса только в пределах одного периода, например, при $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

В связи с доказанной периодичностью синуса сделаем следующее замечание. В учебнике Кочетковых «Алгебра и элементарные функции» (§ 207) подразумевается, но явно не сказано, что для периодической функции вместе с числом x должны входить в область определения и все числа $x+nT$ (n — любое целое число, T — период). Между тем это очень важно: иногда удается доказать непериодичность функции, пользуясь именно этим свойством. Покажем, например, что функция $y=\cos\frac{1}{x}$ — непериодическая. Предположим, что T — период этой функции. При $x=-T$ наша функция определена, значит, она должна быть определена и при $x=-T+T=0$, но при $x=0$ $\cos\frac{1}{x}$ не существует: мы пришли к противоречию.

Совершенно аналогично можно исследовать свойства функции $y=\cos t$. Вам, по-видимому, совершенно ясно, как определить функции $y=\operatorname{tg} t$, $y=\operatorname{ctg} t$ (числового аргумента) и исследовать их свойства.

Упражнения

1. Найдите наименьшие положительные периоды функций:

а) $y=\sin 3x$; б) $y=\operatorname{tg} 2x-\sin 3x$; в) $y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; г) $y=\sin^2 x$; д) $y=\sin(\cos x)$; е) $y=\cos(\sin x)$.

Пример 1. *Доказать непериодичность функции $y=\sin x^2$.*

Решение. Предположим, что данная функция периодическая. Найдем нули этой функции (то есть те значения x, при которых она обращается в нуль): $\sin x^2=0$, откуда $x^2=\pi k$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), $x=\pm\sqrt{\pi k}$. Если $k=0$, то $x_0=0$; если $k=1$, то $x_1=\sqrt{\pi}$. Из сделанного предположения о периодичности функции $y=\sin x^2$ следует, что найдется еще бесконечно много пар соседних ее нулей (получающихся из x_0 и x_1 сдвигами вправо на целое число периодов), разность между которыми равна $x_1-x_0=\sqrt{\pi}$. Но для любого $k>1$ имеем

$$|x_{k+1}-x_k|=|\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}|=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}<\sqrt{\pi},$$

так как $\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}>\sqrt{\pi}$. Полученное противоречие доказывает непериодичность функции $y=\sin x^2$.

Упражнения

2. Докажите непериодичность функций: а) $y=\sin\sqrt{x}$; б) $y=\cos x\cos\sqrt{2}\,x$.
3. Укажите знаки следующих чисел:
а) $\sin 2$; б) $\cos 3{,}1$; в) $\lg 10$; г) $\sin\pi^2$; д) $\lg(\cos 2)$.
4. Дано, что $\cos^2 t+p\cos t+q>0$ при всех действительных значениях t. Следует ли отсюда, что $x^2+px+q>0$ при всех действительных значениях x?

Нетрудно установить простую связь между определениями тригонометрических функций (обобщенного) угла и числового аргумента. Расположим угол так, чтобы его начальная сторона шла по оси Ox (рис. 2). Тогда синус угла по определению равен ординате точки, в которой конечная сторона угла пересекает единичную окружность.

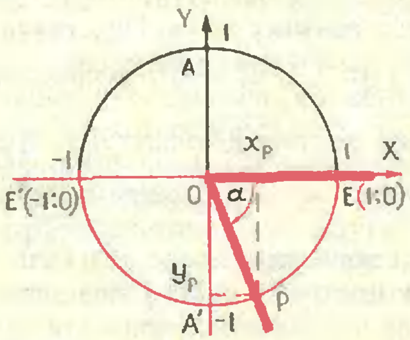


Рис. 2.

Если угол содержит α радиан, то конечная сторона угла будет пересекать единичную окружность в конце дуги, соответствующей числу α при наматывании. Поэтому (сравните рисунки 1 и 2)

$$\boxed{\text{синус угла в } \alpha \text{ радиан равен синусу числа } \alpha.}$$

Именно это свойство принято в школьном учебнике за определение синуса числа (и аналогично для других функций: косинуса, тангенса, котангенса).

2. Преобразования тригонометрических выражений

При решении различных задач часто приходится проводить тождественные преобразования, пользуясь формулами тригонометрии. При этом надо помнить, что некоторые формулы изменяют область определения; кроме того, необходимо выяснять обратимость всех переходов.

Пример 2. (МАИ, 1970). *Доказать тождество*:

$$\frac{\left(\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}. \qquad (2)$$

Решение. Найдем прежде всего ОДЗ. Левая часть (2) определена, когда $\sin 2\alpha-\sin\alpha\neq 0$, то есть когда $2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0$, откуда $\sin\alpha\neq 0$, $\cos\alpha\neq\frac{1}{2}$; окончательно $\alpha\neq\pi n$, $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$*). Правая

*) Здесь и дальше, если не оговорено противное, подразумевается, что параметры n, k, l и т. п. принимают все целочисленные значения.

часть (2) существует при $\sin\frac{\alpha}{4}\neq 0$, то есть при $\alpha\neq 4\pi l$. Итак, ОДЗ найдена: $\alpha\neq n\pi$, $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

Обозначим левую часть тождества через M. Тогда

$$M=\frac{\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\left(\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+\cos\alpha+2\cos\frac{3\alpha}{2}}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\cos\frac{3\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

Итак, в ОДЗ $M=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

Пример 3. *Доказать, что если* $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=0$, *то*

$$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha. \qquad (3)$$

Решение. Заметим, что условие $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=0$ эквивалентно условию

$$\cos(\alpha+\beta)=0. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь разность правой и левой частей (3): $\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha=2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$, откуда, используя (4), получим требуемое.

Упражнения

5. (МАИ, 1970). Докажите тождества:

а) $(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha-\sec\alpha)^2=4\operatorname{ctg}^2 2\alpha+1$;

б) $\sin\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha-1=\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\alpha}{4}}$.

6. Докажите тождества:

а) (МИСП, 1969). $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$; б) (МИФИ). $\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)=\sin^2\alpha$.

7. (Физ. фак. МГУ).

а) Докажите, что если $5\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$, то $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{3}{2}$;

б) Докажите, что если $\cos x=\cos a\cos b$, $x\pm a\neq\pi(2k+1)$, $b\neq\pi(2k+1)$, то

$$1+\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\operatorname{tg}\frac{x-a}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{b}{2}}.$$

Пример 4. *Упростить выражение*

$$M=\sin\alpha+\sin(\alpha+\delta)+\ldots+\sin(\alpha+n\delta).$$

Решение. Заметив, что аргументы синусов образуют арифметическую прогрессию с разностью δ, умножим обе части равенства на $2\sin\frac{\delta}{2}$:

$$2\sin\frac{\delta}{2}\cdot M=2\sin\frac{\delta}{2}\sin\alpha+2\sin\frac{\delta}{2}\sin(\alpha+\delta)+\ldots+2\sin\frac{\delta}{2}\times$$

$$\times\sin(\alpha+n\delta)=\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)-$$

$$-\cos\left(\alpha+\frac{3\delta}{2}\right)+\cdots+\cos\left[\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta\right]-\cos\left[\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta\right]=$$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)-\cos\left[\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta\right]=2\sin\left(\alpha+\frac{n\delta}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\delta.$$

Итак, если $\sin\frac{\delta}{2}\neq 0$, то есть $\delta\neq 2\pi k$, то

$$M=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\delta}{2}\right)}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Если же $\delta=2\pi k$, то
$M=\sin\alpha+\sin(\alpha+2\pi k)+\ldots+\sin(\alpha+2\pi nk)=(n+1)\sin\alpha.$

Упражнения

8. Докажите тождества: а) (МИФИ). $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=$
$=\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; б) (МГУ). $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$;

в) (МГУ) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

9. (МИФИ). Упростите выражения. а) $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha$;
б) $\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\ldots+(-1)^{n+1}\cos n\alpha$;
в) $\sin\alpha+2\sin 2\alpha+3\sin 3\alpha+\ldots+n\sin n\alpha$;
г) $\sin^3\frac{\alpha}{3}+3\sin^3\frac{\alpha}{3^2}+9\sin^3\frac{\alpha}{3^3}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}$.

Пример 5. *Доказать тождество*:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Решение. Заметив, что в правой части тождества стоят котангенсы, выразим $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}2\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha$.

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}-2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Умножая выписанные тождества соответственно на $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ и почленно складывая, мы получим нужный результат. Наши преобразования имеют смысл лишь при $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$ (проверьте!).

Упражнения

10. Докажите тождества: а) (УГПИ). $\sin^2\alpha + \sin^2(120^\circ + \alpha) + \sin^2(120^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}$;

б) (МАИ). $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; в) (МагГПИ) $4\cos^2\alpha + \sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha = 4$.

11. Преобразуйте в произведение: а) (МагГПИ). $\cos^2(x+y) + \sin(x+y) + \cos(x+y) + \sin^2(x+y)$; б) (МАИ). $\operatorname{tg}^3\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha} + 3\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 4$;

в) (МИСП, 1969). $\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$; г) (МТИ, 1970). $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Пример 6. *Вычислить без таблиц* $\sin 18^\circ$.

Решение. Мы воспользуемся тем, что $18^\circ \cdot 5 = 90^\circ$, то есть, что $2 \cdot 18^\circ + 3 \cdot 18^\circ = 90^\circ$, откуда

$$\cos(2 \cdot 18^\circ) = \sin(3 \cdot 18^\circ) \qquad (5)$$

и тем, что $\cos 2\alpha$ и $\sin 3\alpha$ рационально выражаются через $\sin\alpha$. Применив формулы $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ и $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, мы из (5) получим: $4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0$.

Обозначив $\sin 18^\circ$ через y, мы приходим к уравнению

$$4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0, \qquad (6)$$

которое легко решить, заметив, что $y = 1$ — его корень (отсюда сразу следует, что левая часть (6) делится на $y - 1$): $(y-1)(4y^2+2y-1)=0$, откуда $y_1 = 1$, $y_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Учитывая, что $\sin 18^\circ \neq 1$, $\sin 18^\circ > 0$, находим, что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Пример 7. *Упростить выражения*: а) $S_1 = \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha$; б) $S_2 = \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha$.

Решение. Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то

$$S_1 + S_2 = n. \qquad (7)$$

Применив теперь результат упражнения 8а) (при каких α это можно сделать?), мы получим:

$$S_1 - S_2 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) + \cdots + (\cos^2 n\alpha - \sin^2 n\alpha) =$$
$$= \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cdots + \cos 2n\alpha = \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (8)$$

Теперь из (7) и (8) легко получаем: $S_1 = \frac{n}{2} + \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$; $S_2 = \frac{n}{2} - \frac{\sin n\alpha \cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$. Каков ответ при $\alpha = \pi k$?

Упражнения

12. Вычислите без таблиц: а) $\cos 15^\circ$; б) $\operatorname{tg} 7{,}5^\circ$; в) $\cos 18^\circ$; г) (МАИ, 1970). $\cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ \cdot \cos 175^\circ$; д) (МИСП, 1969). $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$.

Пример 8. *Найти* $\cos\alpha + \sin\alpha$, *если* $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}48$.

Решение. Извлекая из обеих частей тождества $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$ квадратный корень (как всегда, арифметический!), получим: $|\cos\alpha + \sin\alpha| = \sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} = 1{,}4$ (подкоренное выражение неотрицательно: $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha \geqslant 0$, так как $\sin 2\alpha \geqslant -1$). Поскольку по условию $\sin\alpha\cos\alpha > 0$, то $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, то есть α находится либо в I, либо в III четверти.

Если $2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, то $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$;

если же $\pi + 2\pi n < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, то $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}4$.

Упражнения

13. а) (МАИ). Найдите $\dfrac{1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = m - 1$; б) (МГУ). Докажите, что если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{7}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, то $\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{4}$ (α и β — углы I четверти); в) (МИСП). Найдите $18\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. г) (МТИ). Найдите $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

14. (МГУ). Известно, что $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ и что $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma$.

15. (МИФИ). Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$;

г) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

д) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$;

е) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = 1$;

ж) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \dfrac{3}{2}$;

з) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2$ (треугольник остроугольный).

16. Докажите неравенства:

а) (МФТИ).

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} > 1 + \operatorname{ctg}\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right);$$

б) (ВГУ). $\cos\alpha + 3\cos 3\alpha + 6\cos 6\alpha \geqslant -7{,}2$;

в) (МФТИ). $(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\,(1-3\operatorname{tg}^2\alpha)\,(1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha) > 0$; г) (МФТИ). $(\operatorname{ctg}^2\alpha-1)\,(3\operatorname{ctg}^2\alpha-1)\times(\operatorname{ctg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha-1) \leqslant -1$; д) (МГУ). $4\sin 3\alpha + 5 \geqslant 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha$.

Примечание. В статье приняты следующие сокращения:
МАИ — Московский авиационный институт, МГУ — Московский государственный университет, МГПИ — Московский государственный педагогический институт, МагГПИ — Магаданский государственный педагогический институт, МТИ — Московский текстильный институт, МИСП — Московский институт стали и сплавов, МИФИ — Московский инженерно-физический институт, УГПИ — Ульяновский государственный педагогический институт, ВГУ — Воронежский государственный университет, МФТИ — Московский физико-технический институт.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский физико-технический институт

Вариант 1

1. Из пункта A выехали три велосипедиста, первый на один час раньше двух других, стартовавших одновременно. Скорость каждого велосипедиста постоянна. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого, а второй догнал первого на два часа позже, чем третий. Определить отношение скоростей первого и третьего велосипедистов, если отношение скорости второго к скорости третьего равно 2/3.

2. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$$

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найти отношение $BC:CA:AB$.

4. Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y^2 - xy + x^2 = z^2, \\ x^2 - xz + z^2 = y^2, \\ z^3 - y^3 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина). Ребро SC этой пирамиды совпадает с боковым ребром правильной треугольной призмы $A_1B_1CA_2B_2S$ (A_1A_2, B_1B_2 и CS — боковые ребра; A_1B_1C — одно из оснований). Вершины призмы A_1 и B_1 лежат в плоскости грани SAB пирамиды. Какую долю от объема всей пирамиды составляет объем ее части, лежащей внутри призмы, если отношение длины бокового ребра пирамиды к длине стороны основания пирамиды равно $2/\sqrt{3}$?

Вариант 2

1. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

2. Решить уравнение:

$$\sin x + \sqrt{1 + \sin 2x} - \cos x = \frac{1}{2}.$$

3. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников OMA, OAB и OBN равны S_1, S_2, S_3 соответственно.

4. Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 2x, \\ y^2 + 3z^2 = 28x^2, \\ y^3 + 8z^3 = (y - 4x)(1 - 4z + 7xy). \end{cases}$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC, а все боковые грани имеют равные площади. Ребро SA равно 2 *см*, ребро SB равно $\sqrt{2}$ *см*. Через вершину B перпендикулярно к ребру SC проведено сечение пирамиды. Найти площадь этого сечения.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Вариант 1

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 \frac{x}{2}} - 2\log_2 \sqrt{x} + \log_2^2 x = 3.$$

3. Найти решения уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 3\operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1)\sec^2 x,$$

удовлетворяющие условию $x > 3$.

4. Про углы треугольника ABC известно, что $\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = 1:2:3$. Найти отношение синусов этих углов.

5. Доказать, что многочлен $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ положителен при всех вещественных x.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$$

2. Решить уравнение:

$$2\log_9^2 x = \log_3 x \log_3 (\sqrt{2x+1} - 1).$$

3. Найти решения уравнения

$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0,$$

удовлетворяющие условию $|x|<2$.

4. Даны углы B и C треугольника ABC ($\angle B \neq \angle C$). Найти котангенс острого угла x, который образует медиана, выходящая из вершины A, со стороной BC.

5. Доказать, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant$$

$$\geqslant (a+b+c)^2.$$

Московский областной педагогический институт имени Н. К. Крупской

Математический факультет

Вариант 1

1. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен 2α, а высота конуса равна H. Найти объем вписанного в этот конус шара, а также площадь полной поверхности конуса.

2. Решить уравнение:

$$\frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 x - \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} + \frac{5}{6} = 0.$$

3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{\frac{3}{5}} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} < 1, \\ \sqrt{5-x^2} > x-1. \end{cases}$$

4. Найти целые числа x и y, удовлетворяющие условию $x^4+y^4+2=4xy$.

Вариант 2

1. Найти площадь полной поверхности конуса, если радиус вписанного в него шара равен R, а образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом α.

2. Решить уравнение:

$$\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x) = 2.$$

3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{x^2+5x-14}{x-2}} > 1, \\ 5-x > \sqrt{x^2-16}. \end{cases}$$

4. Найти все значения параметра m, при которых уравнения

$$x^2 + (m^2-5m+6)x = 0$$

и

$$x^2 + 2(m-3)x + (m^2-7m+12) = 0$$

равносильны.

Физический факультет

1. Равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при основании α, вращается вокруг прямой, проходящей через один из концов основания перпендикулярно к нему. Найти площадь поверхности получившегося тела вращения.

2. Решить уравнение:

$$1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x.$$

3. Найти числовое значение выражения

$$\left(\frac{99a+1}{5a^2-5} + \frac{1}{5a+5} + \frac{20}{1-a}\right) : \frac{4}{a^3b-ab}$$

при $a \approx 1{,}803$ и $b \approx 2$.

4. Найти область определения функции:

$$y = \sqrt{\frac{2x^2+x-6}{(x+2)(x+3)}}.$$

ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Б.Б. БУХОВЦЕВ

Какими величинами можно охарактеризовать состояние идеального газа?

Считая, что нам известен химический состав газа и его масса, мы для описания его состояния можем воспользоваться такими параметрами, как объем V, занимаемый газом, давление P, температура T газа. Связь между этими параметрами идеальных газов отражают четыре основных закона: закон Бойля — Мариотта, закон Гей-Люссака, закон Шарля и закон Клапейрона — Менделеева. Пользуясь уравнениями, описывающими эти законы, можно практически решать любые задачи, в которых нас интересует физическое состояние идеального газа.

Закон Бойля — Мариотта

$$PV = \text{const}. \qquad (I)$$

Это соотношение между давлением и объемом газа впервые было установлено английским физиком Бойлем в 1662 году. В 1676 году независимо от Бойля французский физик Мариотт установил такую же зависимость между давлением и объемом газа. Равенство (I), выражающее закон Бойля — Мариотта, выполняется только при определенных условиях: температура газа остается неизменной, масса его постоянна и химический состав газа не меняется. Кроме того, температура должна быть не слишком низка, а давление не слишком велико.

Различные состояния газа при одной и той же температуре можно изобразить на графике (так называемой P—V-диаграмме) точками. Геометрическое место таких точек — гипербола (это видно и из соотношения (I)). Ее можно рассматривать и как график процесса, происходящего при постоянной температуре — так называемого изотермического процесса (рис. 1). Кривую, описывающую изотермический процесс, называют изотермой.

Здесь важно помнить, что, поставив точку на графике, мы тем самым полностью определяем состояние газа: его давление, объем и температуру. А это означает, что газ находится в каждый момент в состоянии равновесия (термодинамического равновесия). Следовательно, все процессы, описываемые уравнениями и изображаемые на графиках, предполагаются протекающими очень медленно или, как говорят, квазистатически.

Рассмотрим пример типичной задачи на применение закона Бойля — Мариотта.

З а д а ч а. Посредине узкой, запаянной с обоих концов горизонтальной трубки (рис. 2) находится столбик ртути длиной $h = 25$ *см*. Ртуть разделяет в трубке два столба воздуха длиной $l_0 = 1$ *м* каждый. Давление воздуха $P_0 = 76$ *см рт. ст.*, температура остается постоянной. На какое расстояние x переместится столбик ртути, если трубку поставить вертикально?

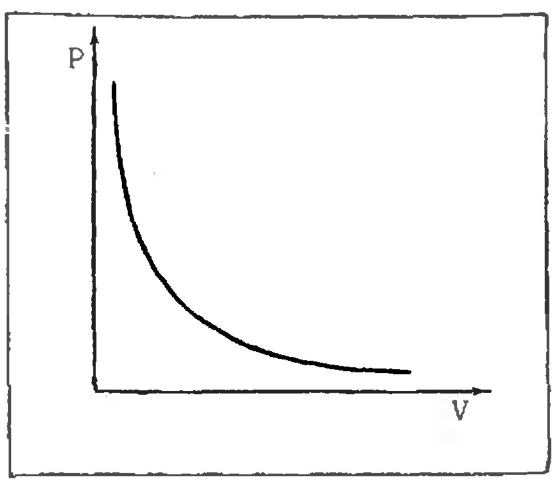


Рис. 1.

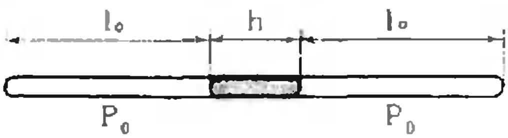


Рис. 2.

Решение. Рассмотрим отдельно два столбика воздуха в стоящей вертикально трубке и применим закон Бойля — Мариотта к каждому из них (площадь сечения трубки S):

$$P_0\, l_0 S = P_1 (l_0 + x)\, S, \qquad (1)$$
$$P_0\, l_0 S = P_2 (l_0 - x)\, S. \qquad (2)$$

Из условия механического равновесия столбика ртути следует, что при вертикальном положении трубки давление в нижнем столбе воздуха равно

$$P_2 = P_1 + \rho g h$$

(ρ — плотность ртути). Подставив это значение P_2 в (2), получим квадратное уравнение, решив которое, найдем, что

$$x = \left(-\frac{P_0}{\rho g} + \sqrt{\left(\frac{P_0}{\rho g}\right)^2 + h^2}\right) \times \frac{l_0}{h} \approx 16 \text{ (см)}$$

(отрицательное значение корня не имеет смысла).

Интересно отметить, что при вычислении неизвестного x нам не нужны сведения о плотности ртути ρ, а также о соотношениях между единицами давления. Дело в том, что по определению давление P, которое создает 1 *см рт. ст.*, равно $P = \rho g \cdot 1$ *см*. Следовательно, $\frac{P}{\rho g} = 76$ *см* без каких-либо дополнительных пересчетов.

Итак, состояниям газа с одинаковой температурой отвечает на диаграмме P—V определенная изотерма. Другой постоянной температуре соответствует другая изотерма. Как она расположена по отношению к первой?

Ответить на этот вопрос, основываясь на одном только законе Бойля — Мариотта, невозможно. Необходимо знать еще одну из зависимостей: либо $V(t)$, либо $P(t)$.

Закон Гей-Люссака

Зависимость объема V газа от температуры при неизменном давлении исследовал французский ученый Гей-Люссак. В 1802 году он опубликовал закон изобарического ($P = \text{const}$) расширения газов.

Согласно закону Гей-Люссака при постоянном давлении, постоянной массе и неизменном химическом составе газа его объем V при температуре t (по шкале Цельсия) равен

$$V = V_0 + \beta V_0 t,$$

или

$$V = V_0 (1 + \beta t), \qquad (11)$$

где V_0 — объем, который занимал газ при 0° С. Опытным путем было найдено, что

$$\beta = \frac{1}{273}\ \textit{град}^{-1}.$$

Таким образом, при повышении температуры газа на один градус объем его возрастает на одну и ту же величину, равную $\frac{V_0}{273}$. Следовательно, график закона Гей-Люссака, то есть график зависимости V от t при постоянном давлении (изобара) — прямая линия. Учитывая это, можно без вычислений решать задачи, аналогичные следующей.

Задача. При нагревании газа от температуры t° С до температуры $(t+1)$° С при неизменном давлении объем газа увеличивается на $\frac{1}{300}$ первоначального, то есть на $\frac{1}{300} V_t$. При каких условиях это может быть?

Решение. При нагревании от 0° С до 1° С объем газа увеличивается на $\frac{1}{273} V_0$, то есть на $\frac{1}{273}$ первоначального, и становится равным

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{273} V_0 = \frac{274}{273} V_0.$$

При нагревании от 1° С до 2° С объем снова увеличивается на ту же величину $\frac{1}{273} V_0$, что составляет уже

$\frac{1}{274}$ часть объема V_1. При нагревании от 2° С до 3° С объем возрастает на $\frac{1}{275} V_2$, от 3° С до 4° С—на $\frac{1}{276} V_3$ и т. д. (рис. 3). Вообще при нагревании от t° С до $(t+1)$° С объем возрастает на $\frac{1}{273+t}$ первоначального. Отсюда следует, что нагревание производилось от 27° до 28° С.

Рассмотрим еще такую задачу.

Задача. При температуре $t_1=25$° С газ занимает объем $V_1=1{,}5$ *л*. Какой объем V_2 будет занимать газ, если нагреть его до $t^2=125$° С при неизменном давлении?

Решение. Объемы V_1 и V_2 связаны с объемом газа при 0° С соотношениями

$$V_1=V_0(1+\beta t_1),\quad V_2=V_0(1+\beta t_2).$$

Отсюда

$$V_2=\frac{1+\beta t_2}{1+\beta t_1}V_1=\frac{\frac{1}{\beta}+t_2}{\frac{1}{\beta}+t_1}V_1=\frac{273+t_2}{273+t_1}V_1\approx 2\ (л).$$

Решения обеих задач показывают, что удобно перейти к другой шкале температур (шкале Кельвина), нуль которой (абсолютный нуль) лежит ниже нуля шкалы Цельсия на 273°. Поскольку именно в этой точке пересекаются продолжения всех изобар (рис. 4), закон Гей-Люссака приобретает особенно простую форму:

$$\frac{V}{T}=\text{const при } P=\text{const},$$

если пользоваться абсолютной температурой T.

Закон Гей-Люссака позволяет установить распределение на P—V-диаграмме изотерм, соответствующих различным температурам.

Закон Шарля

Французский физик Шарль исследовал зависимость давления газа от его температуры при условии, что объем газа, его масса и состав остаются постоянными, и пришел к следующим выводам: приращение давления при нагревании на 1° С составляет определенную часть того давления, которое имел газ при 0° С, и пропорционально приращению температуры.

В математической форме записи закон Шарля очень похож на закон Гей-Люссака:

$$P=P_0+\alpha P_0 t,$$

или

$$P=P_0(1+\alpha t), \qquad (III)$$

где P_0 — давление данной массы газа при 0° С, P — давление газа в том же объеме при температуре t° С. Величину α называют термическим коэффициентом давления и она равна $\frac{1}{273}$ *град*$^{-1}$.

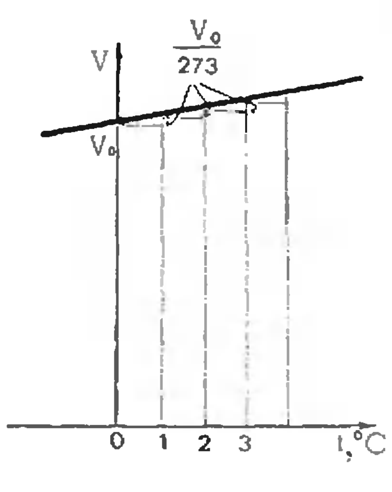


Рис. 3.

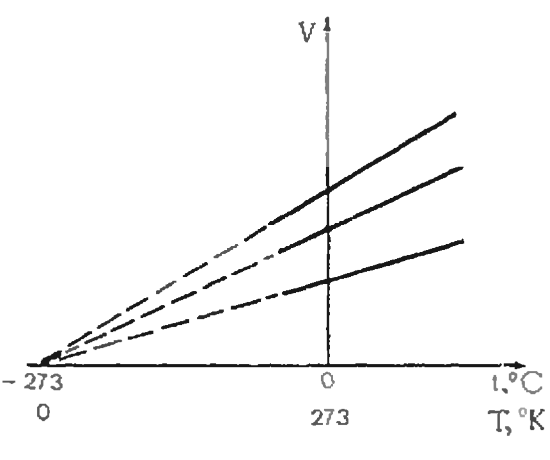


Рис. 4.

На графике зависимости $P(t)$ при $V=\text{const}$ закон Шарля выражается прямыми линиями (изохорами), пересекающими ось t в точке $t=-273°$ С. Перейдя к абсолютной шкале температур, *мы получим простую форму* записи закона Шарля:

$$\frac{P}{T}=\text{const} \quad \text{при} \quad V=\text{const}.$$

Эта зависимость легко получается из законов Бойля — Мариотта и Гей-Люссака с помощью двух переходов $V \to V'$ *при* $T_1=const$ *и* $T_1 \to T_2$ *при* $P_2=\text{const}$ (рис. 5).

Всякий реальный газ подчиняется упомянутым газовым законам лишь приближенно. Полагая, что эти законы выполняются точно, мы считаем газ идеальным. В данной статье речь идет только о таких газах.

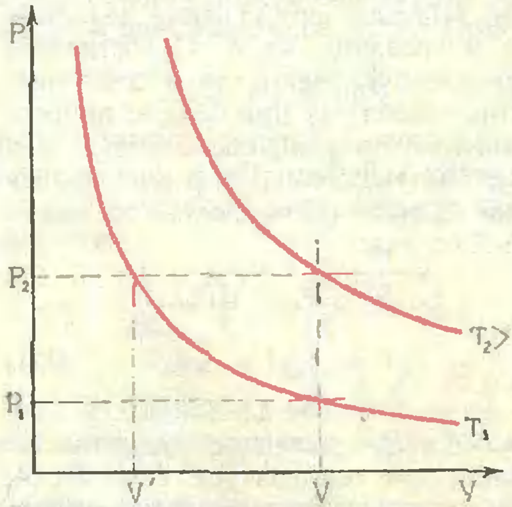


Рис. 5.

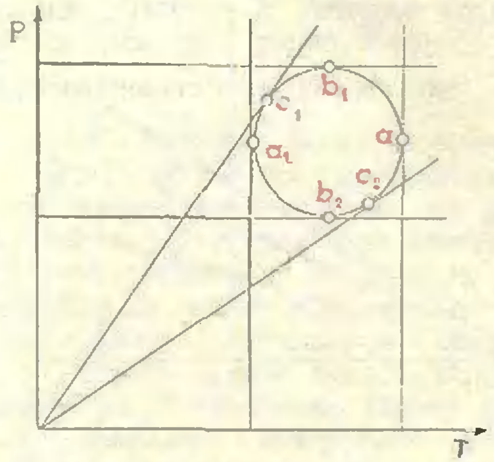


Рис. 6.

Приведем пример задачи на закон Шарля. Манометр на баллоне с кислородом показывал $P_1=95$ *ат* в помещении с температурой $t_1=17°$ С. Баллон вынесли в сарай, где при температуре $t_2=-13°$ С показание манометра стало $P_2=85$ *ат*. Не было ли потерь кислорода во время переноски?

Решение сводится к проверке равенства $\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$, справедливого при $m=\text{const}$ (Ответ: потерь не было.)

Более сложное поведение газа, когда изменяются и давление, и объем, и температура, легче всего проследить на графике. Рассмотрим, к примеру, такую задачу.

Задача. Некоторый процесс, происходящий с идеальным газом, изображается на графике зависимости давления от температуры в виде окружности. Требуется разбить окружность наименьшим числом точек на части, соответствующие процессам, в каждом из которых любая из величин *P, V и T меняется монотонно* (то есть возрастает или убывает.)

Решение. Точки, соответствующие наибольшей и наименьшей температуре в данном процессе, — это точки a_1 и a_2 касания окружности с вертикальными изотермами (рис. 6). Точки, в которых достигается наибольшее и наименьшее давление — точки b_1 и b_2 касания окружности с горизонтальными изобарами. Изохоры на графике $P(T)$ изображаются прямыми, проходящими через начало координат. Чем меньше объем, тем круче идет изохора. Две изохоры, касательные к окружности, дают еще две точки — c_1 и c_2. Всего окружность разбивается, таким образом, на шесть кривых, изображающих требуемые процессы.

Из сказанного ясно, что параметры, определяющие состояние данной массы газа неизменного химического состава (*P, V и T*), связаны друг с другом. Если известны две величины, можно найти третью. Уравнение, определяющее связь температуры, объема и давления, называют уравнением состояния газа.

Уравнение Клапейрона—Менделеева

Для получения этого уравнения свяжем два произвольных состояния идеального газа. Пусть, например, газ переводится из состояния P_1, V_1, T_1 в состояние P_2, V_2, T_2. Для перехода используем уже известные нам процессы. Применяя только два процесса, переход 1—2 (рис. 7) можно осуществить шестью способами (1—3—2, 1—4—2, 1—5—2, 1—6—2, 1—7—2, 1—8—2). Рассмотрим первый из них. Процесс 1—3 изохорический, то есть $V_1=V_3$. Поэтому $\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_3}{T_3}$. Процесс 3—2 изотермический ($T_2=T_3$) и, следовательно, $P_3V_3=P_2V_2$. Перемножив все четыре соотношения, получим

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}.$$

Начальное и конечное состояния газа мы взяли совершенно произвольно. Следовательно, для данной массы газа неизменного химического состава можно написать

$$\frac{PV}{T}=B=\text{const}. \qquad \text{(IV)}$$

Уравнение (IV) устанавливает простую связь между давлением, объемом и температурой данной массы газа. Оно полностью описывает состояние идеального газа. Впервые это уравнение вывел Клапейрон, объединив законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Уравнение Клапейрона позволяет решать задачи, в которых связываются состояния газа при неизменной массе.

Рассмотрим простой пример.

Задача. Цилиндрический сосуд, наполненный газом, разделен подвижной перегородкой на две части так, что отношение объемов частей 2:3. Температура газа в обеих частях одинакова. Каким станет отношение объемов, если температура газа в меньшей части станет равной $T_1=227^\circ$ С, а в большей — $T_2=60^\circ$ С? Трением пренебречь.

Решение. Для газа в меньшей части $\frac{PV_1}{T}=\frac{P'V_1'}{T_1}$. Для газа в большей части $\frac{PV_2}{T}=\frac{P'V_2'}{T_2}$. Отсюда

$$\frac{V_1'}{V_2'}=\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{T_1}{T_2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{273+227}{273+60}\approx 1.$$

Остался лишь один шаг, чтобы сделать уравнение состояния идеальных газов универсальным. Необходимо учесть массу газа и его химическую «индивидуальность». Этот шаг был сделан великим русским химиком Д. И. Менделеевым. Он использовал закон, открытый в 1811 году итальянским ученым А. Авогадро и заключающийся в том, что все газы независимо от их химической природы при одинаковом давлении и температуре занимают одинаковый объем, если они взяты в количествах, пропорциональных их молекулярной массе. В частности, при 0°С ($T_0=273^\circ$ К) и давлении $P=1$ *атм* объем газа $V_{0\mu}=22{,}4$ *м³/кмоль* $=22{,}4$ *л/моль*. Зная это, можно вычислить постоянную B в уравнении (IV). Она пропорциональна числу молей газа. Это число находится делением массы газа на молекулярную массу: $\nu=\frac{m}{\mu}$.

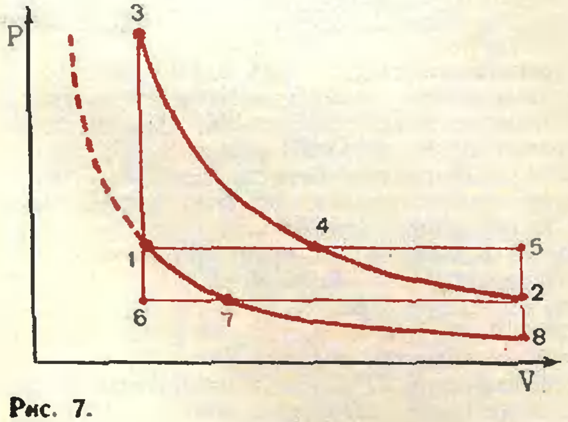


Рис. 7.

Коэффициент пропорциональности $R=\frac{P_0V_{0\mu}}{T_0}$ называют универсальной газовой постоянной. Подсчет дает для R значение

$$R = 8{,}3\cdot 10^3 \quad \text{дж/град}\cdot\text{кмоль} = 0{,}082 \ \text{л}\cdot\text{атм/град}\cdot\text{моль}.$$

Таким образом, уравнение состояния идеального газа, которое называют уравнением Менделеева—Клапейрона, записывают в виде

$$PV=\frac{m}{\mu}RT. \qquad \text{(V)}$$

Любая задача на расчет процессов в идеальных газах решается почти автоматически, если сразу записать уравнение (V) для каждого состояния газа. Но уравнение (V) позволяет решать и задачи другого типа.

З а д а ч а. Плотность пара некоторого соединения углерода и водорода равна $\rho=2{,}5$ *г/л* при температуре $t=10°$ С и давлении $P=760$ *мм рт. ст.* Какое это соединение?

Р е ш е н и е. Из уравнения (V) можно найти молекулярную массу соединения:

$$\mu=\frac{mRT}{PV}=\frac{\rho RT}{P}\approx 58 \ (\text{г/моль}).$$

Такую молекулярную массу имеют изомеры бутана C_4H_{10}.

Рассмотрим еще одну задачу.

З а д а ч а. Считая, что из общей массы воздуха 75% приходится на долю азота, а 25% — на долю кислорода, определить, сколько воздуха выйдет из комнаты объемом 50 $м^3$ при повышении температуры от 17° С до 27° С. Атмосферное давление нормальное ($P_0=1$ *атм*).

Р е ш е н и е. Молекулярная масса воздуха

$$\mu=\frac{0{,}75m+0{,}25m}{\frac{0{,}75m}{\mu_1}+\frac{0{,}25m}{\mu_2}}\approx 29 \ (\text{кг/кмоль}).$$

Изменение массы воздуха в комнате

$$\Delta m=\frac{\mu P_0V}{RT_2}-\frac{\mu P_0V}{RT_1}=$$

$$=\frac{\mu P_0VT_0}{P_0V_{0\mu}}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)\approx -2 \ (\text{кг}).$$

Упражнения

1. Барометр дает неверные показания вследствие присутствия небольшого количества воздуха над столбиком ртути. При давлении 755 *мм рт. ст.* барометр показывает 748 *мм рт. ст.*, а при 740 *мм рт. ст.* — 736 *мм рт. ст.* Какое давление будет показывать барометр, если действительное давление равно 760 *мм рт. ст.*?

2. Как изменялось давление газа во время процесса, изображенного на рис. 8?

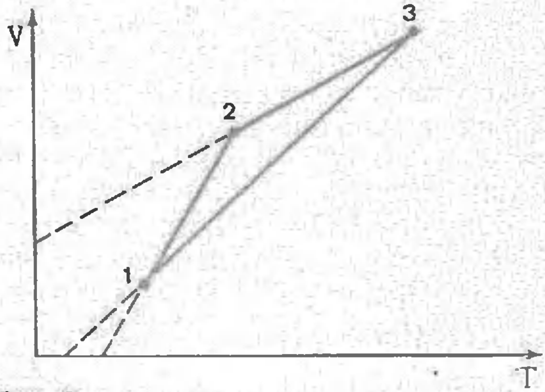


Рис. 8.

3. Сообщающиеся сосуды, показанные на рисунке 9, погружают в теплую воду. Описать поведение ртути в манометре.

4. Свободно скользящий газонепроницаемый поршень удерживается посредине откачанного сосуда двумя идеальными пружинами. Когда в одну из половин сосуда ввели газ при температуре $T_1=300°$ К, длина этой части сосуда оказалась равной $x_1=0{,}2$ *мм*, а после нагревания газа до $T_2=750°$ К длина той же части стала $x_2=0{,}25$ *м*. Какова будет длина x_3 при $T_3=1200°$ К?

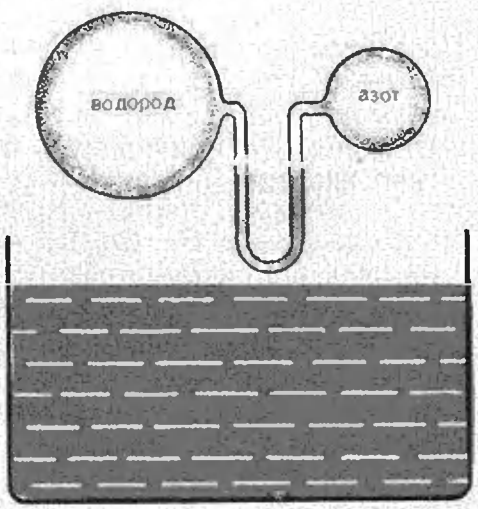


Рис. 9.

5. Вывести уравнение (IV), используя процессы 1—4—2, 1—5—2, 1—7—2 или 1—8—2 (см. рис. 7).

6. Баллон емкостью 20,5 *л* содержит смесь водорода и гелия. Масса смеси 13 *г*, температура 27° С, давление 5,4 *атм*. Определить массу водорода и массу гелия.

Математические головоломки и развлечения

Под таким названием вышла в 1971 году книга М. Гарднера *).

Это не первый перевод книг М. Гарднера. Вышедшие ранее переводы его книг «Этот правый, левый мир», «Теория относительности для миллионов», «Математические чудеса и тайны» завоевали широкое признание советского читателя. Секрет удачи автора в том, что он умеет позаботиться о читателе: там, где необходимость требует что-либо объяснить, он не пренебрегает этим; там, где читатель с удовольствием провел бы рассуждения или вычисления сам, Гарднер предоставляет ему такую возможность. В «Математических головоломках и развлечениях» стиль автора — сочетание довольно высокого для популярного текста научного уровня изложения с мягким, тактичным и, как правило, уместным юмором — остался прежним. На науку у него выработался собственный взгляд, вероятно, еще в 50-е годы, когда он занимался исследованием, что собой представляет псевдонаука. Впрочем, несколько позднее ему довелось редактировать книгу известного философа и физика Карнапа, который пытался доступно для широкого читателя рассказать, что собой представляют понятия, теория и методы физических наук. С другой стороны, Мартин Гарднер приобрел опыт очеркиста, работая до Второй мировой войны в газетах. После войны он начал писать новеллы, и намеревался стать писателем-профессионалом, специализирующимся в беллетристике, но победило влечение к точным наукам, в которых он искал занимательное и парадоксальное.

Книга «Математические головоломки и развлечения» представляет собой сборник математических научно-популярных очерков и отдельных задач с решениями. Эти материалы выдержали читательскую критику, поскольку первоначально издавались в журнале Scientific American, где с 1957 года Мартин Гарднер ведет раздел «Математические игры». Наиболее интересные письма читателей автор включил в книгу.

За счет чего достигается занимательность? Конечно, дело не только в мягком юморе. Целые страницы уделяются истории возникновения и развития чем-либо замечательных математических проблем, игр и теорий, причем читателю представляется возможность участвовать в создании этой истории. Читатель (а он далеко не всегда является профессиональным математиком) находит решения задач, которые ставят в тупик порой и специалистов, хотя и не требуют сколько-нибудь глубоких познаний от того, кто ими занимается. Немаловажную роль для занимательности играют неожиданные выводы, к которым Гарднер подводит читателя.

И еще об одной стороне занимательности книги Гарднера следует сказать особо. Ссылаясь на известного изобретателя головоломок Генри Дьюдени, Гарднер пишет: «...литература по занимательной математике страдает чудовищными повторениями». И тут же добавляет: «...хочу надеяться, что в моей книге читатели обнаружат бо́льшую, чем обычно, порцию свежего материала, который прежде не находил места на страницах занимательной математической литературы». Большинство читателей едва ли не в любом из помещенных в «Математических головоломках и развлечениях» очерке или подборке задач найдет для себя новое и неожиданное.

Устанавливая свое кредо, Мартин Гарднер пишет: «Математики творческого склада обычно не стыдятся своего интереса к занимательным задачам и головоломкам. Топология берет свое начало в работе Эйлера о семи кенигсбергских мостах. Лейбниц потратил немало времени на решение головоломки, которая недавно пережила свое второе рождение под названием «Проверьте уровень своего развития».

*) М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения. М., «Мир», 1971.

Очевидец рассказывает о целой полке в книжном шкафу Эйнштейна, «забитой математическими забавами и головоломками». «Нетрудно понять интерес, который все эти великие умы питали к математической игре, ибо творческое мышление, находящее для себя награду в столь тривиальных задачках, сродни тому типу мышления, который приводит к математическому и вообще научному открытию. В конце концов, что такое математика, как не систематические попытки найти все лучшие и лучшие ответы на те головоломки, которые ставит перед нами природа?».

При всем том, будучи популярной, книга Гарднера не для легкого чтения. Очень часто он приводит ответы на вопросы, которые могли в свое время заинтересовать читателя, и остались тогда нерешенными. Вот, скажем, игра в крестики и нолики. Кто в нее не играл?

Впрочем, не будем пересказывать эту книгу, вы, вероятно, уже согласны с тем, что ее необходимо прочитать. В заключение приведем несколько фрагментов из этой книги.

* * *

«Кто из нас в детстве не играл в крестики и нолики? Любой мальчишка за час может стать непобедимым чемпионом. В то же время игра в крестики и нолики имеет и более сложные разновидности и более глубокую стратегию.

На языке теории игр крестики и нолики можно назвать конечной (то есть доигрываемой до конца за конечное число ходов) строго детерминированной (то есть не содержащей элемент случайности) игрой двух сторон с полной информацией. Последнее означает, что обоим игрокам известны все сделанные ходы. Если обе стороны играют «рационально», игра должна закончиться вничью. Единственный способ выиграть заключается в том, чтобы заманить неосторожного противника в ловушку, заготовив для следующего своего хода два почти готовых ряда (противник может помешать достроить лишь один ряд).

Рис. 1.

Из трех возможных начальных ходов — в угол, в центр и в боковую клетку — самым сильным является ход в угол, так как при этом противник, чтобы не попасть с самого начала в ловушку, из восьми оставшихся клеток может выбрать только одну центральную. Наоборот, если первый ход сделан в центр, то блокировать его можно, лишь заняв угол. Наиболее интересная партия получается только в том случае, когда первый игрок, открывая игру, занимает одну из боковых клеток: при таком начале перед обеими сторонами открываются широкие возможности в постановке ловушек. Три первых хода и ответы на них второго игрока, действующего осмотрительно, показаны на рисунке 1.

За много веков до нашей эры были известны гораздо более интересные с математической точки зрения варианты крестиков и ноликов, чем тот, в который принято играть в наше время. Во всех этих вариантах для игры нужно взять шесть фишек, по три у каждого игрока (у одного, например, три трехкопеечные монеты, а у другого три пятака), и доску, изображенную на рисунке 2.

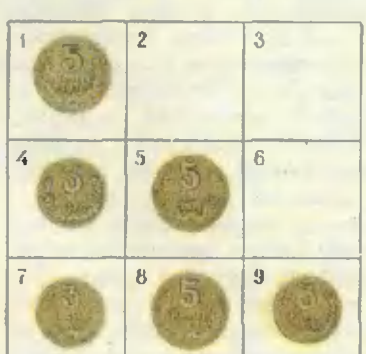


Рис. 2.

В древнем Китае, Греции и Риме был популярен самый простой вариант игры, когда играющие по очереди выставляют на доску фишки и делают это до тех пор, пока не выставят все шесть фишек. Если ни одному игроку не удается поставить три монеты в ряд и выиграть, то игра продолжается. Каждый из противников передвигает по очереди одну из своих фишек на соседнюю клетку. Передвигать фишки можно только по вертикали и горизонтали.

Поскольку первый игрок, начиная с центра, наверняка выигрывает, то такое начало не сулит ничего интересного и обычно им не пользуются. Это ограничение при рациональной тактике приводит к ничьей, но обе стороны могут поставить противнику уйму потенциальных ловушек.

Я знаю многих любителей крестиков и ноликов, которые ошибочно полагают, что самое главное — это научиться неизменно выигрывать, и считают, что они уже постигли все тайны этой игры. Истинный же мастер игры в крестики и нолики должен уметь использовать малейшее преимущество, возникающее даже в тяжелых для него ситуациях. Следующие три примера помогут читателю уяснить сказанное. Первый ход во всех трех партиях делается на одну из клеток 2, 6, 8 и 4.

Если вы начинаете с хода ×8, а противник отвечает вам ходом ○2, то вторым ходом вам лучше всего пойти на четвертую клетку (×4). Этот ход приводит к выигрышу в четырех из шести возможных ответных ходов противника. Помешать вам выиграть противник может лишь ходом ○7 или ○9. Если противник сначала пошел ×8, а вы ответным ходом заняли одну из нижних угловых клеток, например, ○9, то вы еще можете надеяться на победу: противнику достаточно совершить любой из ходов ×2, ×4 или ×7.

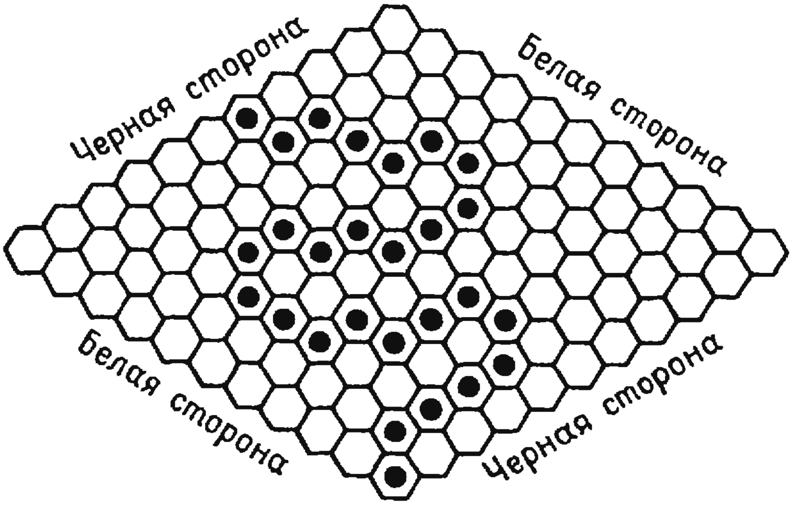


Рис. 3.

Если противник делает первый ход $\times 8$, то ответный ход $\odot 5$ может привести к интересному развитию партии: если противник вторым ходом занимает клетку 2($\times 2$), то вы можете даже позволить ему выбрать за вас ту клетку, которую вы займете при следующем ходе. При любом вашем ходе выигрыш вам обеспечен.

* * *

В наши дни редко кому удается придумать математическую игру, которая была бы одновременно и новой, и интересной. Именно такой оригинальной и увлекательной является игра в гекс, впервые появившаяся лет пятнадцать назад в Институте теоретической физики Нильса Бора в Копенгагене. Гекс вполне может стать одной из наиболее популярных и наиболее полно исследованных математических игр нашего века.

В гекс играют на доске, имеющей форму ромба, составленного из шестиугольников (рис. 3). Число шестиугольников может быть разным, но обычно предпочитают играть на доске, вдоль стороны которой укладывается одиннадцать шестиугольников. Две противоположные стороны ромба называются «черными», две другие «белыми». Шестиугольники, находящиеся в углах ромба, относятся к обеим сторонам. Один игрок играет черными фишками, второй белыми. Играющие по очереди ставят фишку на любой шестиугольник, еще не занятый другой фишкой. Цель «черных» состоит в том, чтобы построить цепь из черных фишек между двумя «черными» сторонами. «Белые» стремятся построить цепь из белых фишек между «белыми» сторонами.

Цепь может как угодно изгибаться, поворачивать. Фишки ставят до тех пор, пока кто-нибудь из игроков не выстроит свою цепь. На рисунке 3, например, видно, как победили «черные». Игра никогда не кончается вничью, потому что один из участников может запереть другого только построив свою цепь. Хотя правила гекса очень просты, тем не менее он оказывается удивительно тонкой математической игрой.

Придумал гекс датчанин Пит Хейн. В молодости Хейн провел несколько лет в Институте теоретической физики, а затем, сделав несколько технических изобретений, стал работать в промышленности. Так продолжалось до 1940 года, до вторжения немцев в Данию. Во время оккупации Хейн дважды уходил в подполье — он был председателем антинацистского демократического союза, распущенного с приходом нацистов.

Идея игры в гекс пришла Хейну в голову, когда он размышлял над знаменитой топологической проблемой четырех красок. Вскоре правила игры были опубликованы в газете «Политикен» и гекс стал необычайно популярен в Дании под названием «Многоугольник».

Читателям, которым захочется поиграть в гекс, следует заранее заготовить листки с начерченными на них досками. Ходы можно отмечать крестиками и кружками. Если вам больше нравится передвигать фишки на «настоящей» доске, можно нарисовать большую доску на листе толстого картона или сложить ее из шестиугольных керамических плиток. Если плитки достаточно большие, то играть можно обычными шашками.

Чтобы понять все тонкости игры в гекс, лучше воспользоваться игровым полем, состоящим из небольшого числа шестиугольников. На доске 2×2 (четыре шестиугольника) всегда выигрывает тот, кто делает первый ход. На доске 3×3 легко выиграть, если первый ход сделать в центр доски (рис. 4). «Черные» могут пойти двумя разными способами, заняв любой из двух шестиугольников,

Рис. 4.

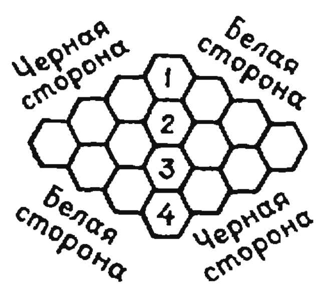


Рис. 5.

расположенных по обе стороны от центра, и поэтому на третьем ходу обязательно выигрывают.

На доске 4×4 все гораздо сложнее. Начинающий игру выигрывает наверняка лишь в том случае, если он сразу же занимает одну из четырех пронумерованных клеток (рис. 5). Сделав первый ход на любую другую клетку, он непременно проиграет. Начав игру с клеток 2 или 3, первый игрок одержит победу на пятом ходу; начав с клеток 1 или 4 — на шестом.

Для доски 5×5 еще можно доказать, что если первый игрок сразу же занимает центральную клетку, то он может выиграть на седьмом ходу. Для досок большего размера анализ становится слишком сложным. Стандартная доска 11×11 таит в себе астрономическое число усложнений, и полный анализ игры в гекс на такой доске находится за пределами человеческих возможностей.

Специалисты по теории игр считают гекс особенно интересной игрой. Действительно, для игры на стандартной доске не известно, какой тактики необходимо придерживаться, чтобы наверняка обеспечить победу. Однако доказательством от противного можно довольно изящно показать, что для первого игрока всегда существует выигрышная стратегия на доске любого размера.

* * *

В заключение приведем еще две задачи

* * *

В трехэтажном доме проведена скрытая проводка. Наружу провода выходят только в двух местах: на третьем этаже и в подвале. В том и другом случаях вывод представляет собой пучок из 11 абсолютно одинаковых проводов. Какой конец провода в верхнем выводе соответствует тому или иному концу провода в нижнем выводе, неизвестно. Именно это и должен был установить монтер.

Чтобы выполнить свою задачу, он может сделать две вещи:

1) закоротить любые провода вверху или внизу, скрутив их концы;

2) отыскать замкнутый контур с помощью специального тестера, состоящего из батарейки и звонка.

Не желая понапрасну бегать вверх и вниз по лестнице, электрик, увлекающийся к тому же исследованием операций, уселся на ступеньке с карандашом и бумагой и вскоре придумал наиболее эффективный способ решения задачи.

В чем состоял его метод?

* * *

Одна из самых старых топологических головоломок, известных любому школь-

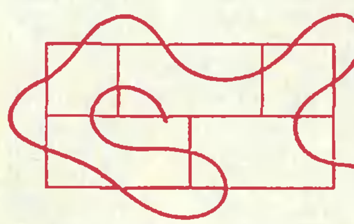


Рис. 6.

нику, состоит в вычерчивании непрерывной линии, пересекающей по одному разу все 16 звеньев замкнутой сети прямолинейных отрезков, изображенных на рисунке 6. Кривая, проведенная на этом рисунке, не может служить решением головоломки, потому что не пересекает одного звена сети. При построении решения использовать какие-нибудь трюки — проводить кривую через вершины сети, вдоль ее звеньев, складывать лист бумаги и т. д., — нельзя.

Нетрудно доказать, что на плоскости эта головоломка решения не имеет. Возникают два вопроса: можно ли решить ее на сфере? Существует ли решение на поверхности тора?»

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

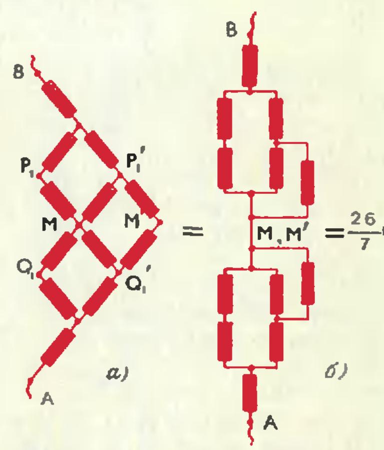
ПОПРАВКА

к статье А. Хацета

«Методы расчета эквивалентных сопротивлений»

(«Квант» № 2, 1972)

По вине редактора в решении задачи № 6 допущена ошибка. Утверждение, что пары точек P_1 и P_1', Q_1 и Q_1' (см. рис. 6б в статье) эквипотенциальны, неверно. Эквипотенциальными являются точки M и M' (см. рис. *а*). Соединив эти



точки, можно преобразовать цепь так, как это указано на рисунке *б*. Сопротивление такой цепи равно $\frac{26}{7}r$. Следовательно, сопротивление всей цепи (см. рис. 6*а* в статье) равно $\frac{13}{7}r$.

СЛЕТ УЧАЩИХСЯ физико-математических школ

С 3 по 8 января 1972 года в Ленинграде проходил слет учащихся физико-математических школ. Это уже третий слет — о первых двух, состоявшихся в Горьком и Тбилиси в 1971 году, сообщалось в «Кванте» № 2 за этот год.

На этот раз организатором слета была Ленинградская школа № 239. На слете было представлено 18 городов: Алма-Ата, Брест, Волгоград, Горький, Душанбе, Казань, Киев, Кишинев, Кострома, Минск, Москва, Мурманск, Одесса, Рига, Ташкент, Тбилиси, Чебоксары и Ленинград.

Оргкомитет слета во главе с преподавателем 239-й школы Г. П. Посецельским подготовил обширную программу. Организационные заботы взяли на себя учащиеся школы, справились они с этим прекрасно.

3 января состоялось торжественное открытие слета. 4 января был день математики. Сначала на пленарном заседании профессор В. А. Залгаллер прочел доклад «Роль математики в выполнении задач 9-й пятилетки». В этом докладе было рассказано о современных приложениях математики в технике и промышленности, в частности, о применении автоматизированных систем. Затем с докладом «Проблемы развития современной алгебры» выступил кандидат физико-математических наук А. Е. Евсеев.

После пленарного заседания проходила микроолимпиада по математике. Ею руководил студент ЛГУ Валерий Федотов. Школьникам были предложены 7 задач (в двух вариантах), на решение которых давался один час. Тексты задач вы найдете в конце статьи. Решившие эти задачи проходили в другую аудиторию, где им предлагалась еще одна из двух задач (на выбор). По итогам микроолимпиады было присуждено 8 дипломов первой степени, 18 — второй и 26 — третьей.

После микроолимпиады началась работа секций арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии, логики и двух секций прикладной математики. Работой секций руководили сотрудники Ленинградского отделения математического института (ЛОМИ) Академии наук СССР. Было заслушано 57 докладов. Среди них были и короткие сообщения, и большие доклады. Были и биографические доклады о выдающихся математиках.

Например, были прочитаны доклады «Победитель простых чисел П. Л. Чебышев» *Ирой Шитихиной* (9 кл. 8 шк., Волгоград), «Числа Фибоначчи» *Александром Сазоновым* (10 класс 131 шк., Казань), «Сумма кубов членов арифметической прогрессии» *Андреем Вощенковым* (9 кл. 239 шк., Ленинград), «Центр и радиус точечного множества на плоскости» *Любовью Бубель* (10 кл. 40 шк., Горький), «Аксиоматика» *Вадимом Строповым* (10 кл. 239 шк., Ленинград), «Геометрические построения с помощью циркуля» *Тамарой Чайка* (9 кл. 42 шк., Тбилиси), «От единицы до кватерниона» *Владимиром Побочим* (9 кл. 121 шк., Ленинград), «Динамические системы» *Николаем Малышевым* (10 кл. 40 шк., Горький), «Линейное программирование» *Еленой Козловой* (9 кл. 110 шк., Ташкент), «Графы и раскрашивание карт» *Андреем Калязиным* (10 кл. 444 шк., Москва), «Авиценна — таджикский математик» *Рано Намеевой* (школа-интернат № 2, Душанбе) и другие.

При оценке докладов жюри, составленное из руководителей секций, обращало внимание прежде всего на самостоятельность работы.

Были присуждены шесть специальных дипломов «За серьезную подготовку и содержательное выступление на секции математики». Их получили *Александр Иванов* (9 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «Теорема Бернулли и ее применение к решению задач на максимум и минимум», *Ира Винокурова* (10 кл. 110 шк., Ташкент) за доклад «Вычисление длины кривых», *Нино Гварамадзе* (10 кл. 42 шк., Тбилиси) за доклад «Об одном свойстве периодических функций», *Владимир Лемер* (10 кл. 32 шк., Кострома) за доклад «Доказательство малой теоремы Ферма», *Владимир Емельянов* и *Сергей Родионов* (10 кл. 366 шк., Ленинград) за совместный доклад «Математическое доказательство «пользы от хищников». В последнем докладе средствами моделирования и дифференциального исчисления было рассмотрено динамическое равновесие между «волками» и «зайцами», изменение их численности во времени после отстрела «волков» и, тем самым, последствия отстрела «волков».

Были также присуждены дипломы «За интересное сообщение на секции» (с названием секции) первой, второй и третьей степени. Эти дипломы получили еще 19 школьников. Остальные докладчики получили дипломы «За активное участие в работе секций математики».

Две премии от журнала «Квант» за самостоятельность мышления и серьезный подход к математике и физике были присуждены *Игорю Неровнову* (9 кл. 1 шк., Брест) и *Андрею Беляеву* (10 кл. школы-интерната № 2, Чебоксары).

Вечером 4 января был поднят флаг слета.

5 января был день физики. Работа секций физики проходила в новом здании физического факультета ЛГУ в Петергофе (под Ленинградом). Сотрудники Ленинградского университета приняли самое активное участие в подготовке и организации работы секций физики. Пленарное заседение открыл заместитель декана физического факультета ЛГУ В. И. Вальков. Он пожелал участникам слета плодотворной, интересной работы, больших успехов в их дальнейшей научной деятельности. С интересным докладом выступил перед аудиторией крупный советский ученый, один из ведущих специалистов в области оптики профессор С. Э. Фриш. Он рассказал о развитии физики в нашей стране, о той роли, которую играет физика в прогрессе науки и техники, подробно остановился на основных проблемах оптики, над которыми работают ученые в наши дни.

После доклада школьникам была предложена экспериментальная викторина. Она проходила очень интересно. Перед аудиторией проводился небольшой эксперимент, демонстрирующий какое-нибудь физическое явление, и всем участникам предлагалось рассказать о сущности физических процессов, лежащих в основе этого явления. Для правильного ответа нужны были хорошие знания физики в пределах школьного курса. Вот некоторые из опытов, которые демонстрировались на викторине.

В цилиндрическую банку введены два электрода, подсоединенные к электрофорной машине. Банка наполняется через резиновую трубку дымом. Когда «включают» электрофорную машину, дым очень быстро исчезает. Как объяснить это явление?

Всем школьникам известно, как работает тепловой амперметр. Через проволоку проходит электрический ток, проволока нагревается, удлиняется и прикрепленная к ней стрелка амперметра «ползет» вверх. Нагрез проволоку до белого каления, ток выключают. Стрелка амперметра начинает возвращаться к нулю. В некоторый момент (то есть при некоторой температуре проволоки) происходит скачок — стрелка опять «ползет» вверх, а затем возвращается в прежнем направлении к нулю. Чем это объяснить?

Интересный опыт был продемонстрирован с газовым гелий-неоновым лазером. В темноте луч лазера проецируется на экран. На экране видна светящаяся точка. Затем экспериментатор помещает на пути луча пластинку, и картина на экране меняется: вместо точки появляется система светящихся точек, образующих квадратную сетку. При этом самые яркие точки располагаются в двух взаимно перпендикулярных направлениях, образуя крест. Что за пластинку поставили на пути луча?

Ребята принимали активное участие в викторине. Были, конечно, и неверные ответы, но ошибки исправлялись тут же, на ходу.

После небольшого перерыва началась работа секций. Всего на семи секциях физики было прочитано 54 доклада. Ребята выбирали себе доклады, которые им хотелось бы послушать, и некоторые успели побывать не на одной секции. Темы докладов были самые разнообразные, охватывающие очень многие области физики: о критическом состоянии вещества и об электромагнитном биополе мозга, о полупроводниковых фотодиодах и о нейтронных звездах, о голографии и об экспериментальных обоснованиях специальной теории относительности Эйнштейна. Наиболее интересными были те доклады, в которых школьники творчески подходили к решению поставленной задачи, рассказывали о результатах самостоятельных исследований, проявляли глубокие, фундаментальные знания в рассматриваемом вопросе.

В этом плане очень интересным был доклад *Владимира Гончарова* (10 кл. 131 шк., Казань). Володя продемонстрировал собранный им самим прибор, дающий возможность наглядно проиллюстрировать свойства ультразвука, и рассказал о различных областях техники и производства, в которых находит применение ультразвук.

Всем очень понравился доклад *Николая Макарова* (10 кл. 239 шк., Ленинград) «К вопросу о свободном падении струй». В нем были сообщены результаты измерений величины ускорения свободного падения. Жюри отметило самостоятельность эксперимента, поставленного Николаем, хорошую обработку результатов и четкость изложения доклада.

Вообще перед жюри стояла трудная задача: надо было из многих хороших докладов выбрать лучшие. После длительного сове-

щания жюри секций физики постановило за серьезные, самостоятельные доклады, за проявленные глубокие знания по физике, за научный подход к решению поставленной задачи присудить специальные дипломы следующим участникам слета: *Владимиру Гончарову* (10 кл. 131 шк., Казань) за доклад «Демонстрация опытов с ультразвуком», *Григорию Либерману* (10 кл. 116 шк., Одесса) за доклад «О способе решения ряда гравитационных задач», *Николаю Макарову* (10 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «К вопросу о свободном падении струй», *Юрию Калафати* (10 кл. 444 шк., Москва) за доклад «Парамагнитное возбуждение колебаний», *Владимиру Гомоюнову* (10 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «Об одном оптическом эффекте и роли ограничения пучков», *Аркадию Аксельроду* (10 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «Расчет нормальных колебаний молекул», *Кириллу Тынтареву* (10 кл. 239 шк., Ленинград) за доклад «Испарение капли воды в стационарном потоке теплого воздуха».

Дипломы первой степени были присуждены восьми участникам слета, дипломы второй степени — еще восьми участникам. 19 школьников получили поощрительные дипломы.

7 января на слете работали секция истории (в музее истории Ленинграда; на этой секции было сделано 7 докладов), секция литературы (в Пушкинском доме; 17 докладов и конкурс поэзии); секция комсомольского актива работала в здании школы № 239. Вечером 7 января две команды, составленные из участников слета, провели «математический бой» — соревнование (похожее на КВН) по решению задач.

На слете были проведены спортивные соревнования по баскетболу, шахматам, настольному теннису и стрельбе, фотоконкурс «Города и люди Союза», по итогам которого 10 работ были отмечены премиями и грамотами, смотр художественной самодеятельности.

За время пребывания в Ленинграде участники слета посетили комнату В. И. Ленина в Смольном, побывали в театрах, совершили экскурсии на крейсер «Аврора», в Петропавловскую крепость, в музей Кировского завода, в музей истории Ленинграда, Русский музей, Эрмитаж и автобусную экскурсию по городу «Ленинград — город Ленина».

8 января состоялось торжественное закрытие слета; участникам слета были вручены дипломы, грамоты и сувениры. Делегации разных городов вручали памятные подарки его организаторам. Слет несомненно принес огромную пользу в установлении контактов между физико-математическими школами разных городов, и память о нем надолго останется у всех делегатов.

А. Н. Виленкин, Т. С. Петрова

Задачи микроолимпиады по математике

Какие из следующих утверждений верны, а какие — нет?

Вариант 1

1. В неравных треугольниках против неравных сторон лежат неравные углы.
2. Существует пятиугольник, который можно разрезать на два треугольника.
3. $\underbrace{1777\ldots7771}_{1972\text{ цифры}}$ — простое число.
4. Существует выпуклый 13-угольник с четырьмя острыми углами.
5. Если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника, то три высоты первого треугольника соответственно равны трем высотам второго.
6. Если сумма цифр числа делится на 81, то и само число делится на 81.
7. Ушестеренная площадь треугольника не превосходит суммы квадратов его сторон.

Вариант 2

1. В неравных треугольниках на неравные стороны опускаются неравные высоты.
2. Существует семиугольник, который можно разрезать на два треугольника.
3. $\underbrace{1888\ldots8881}_{1972\text{ цифры}}$ — число составное.
4. Существует выпуклый 14-угольник с тремя острыми углами.
5. Если три медианы треугольника равны между собой, то его биссектрисы также равны между собой.
6. 57599 — простое число.
7. $\pi^{\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}60^\circ} = e^{\ln\operatorname{ctg}11^\circ\cdot\ln\operatorname{ctg}12^\circ\cdot\ldots\cdot\ln\operatorname{ctg}60^\circ}$.

Дополнительные задачи для решивших один из вариантов

1. На карьере добыли 15 камней, веса которых образуют арифметическую прогрессию с разностью 29 кг, причем вес самого тяжелого камня — 1000 кг. Можно ли вывезти эти камни на четырех трехтонных грузовиках?

2. Даны 1972 числа:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt[k]{k}, \ldots, \sqrt[1972]{1972}.$$

Доказать, что произведение всевозможных попарных разностей этих чисел меньше, чем

$$\frac{1}{1^1\cdot2^2\cdot3^3\cdot\ldots\cdot1972^{1972}}.$$

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

Леонардо да Винчи (1452—1519 г.) один из крупнейших представителей эпохи Возрождения.

Среди титанов, порожденных этой эпохой, ему принадлежало одно из первых мест. По словам Энгельса, он был «не только великим художником, но и великим математиком, механиком и инженером, которому обязаны важнейшими открытиями самые разнообразные отрасли физики».

Леонардо да Винчи утверждал, что научные исследования должны основываться на экспериментальном изучении природы. Он писал: «Истолкователем природы является опыт. Он не обманывает никогда. Наше суждение иногда обманывается, потому что ожидает результатов, не подтверждаемых опытом. Надо производить опыты, изменяя обстоятельства, пока не извлечем из них общих правил, потому что опыт доставляет истинные правила... Они в свою очередь направляют наши исследования в природе и наши работы в области искусства».

Леонардо да Винчи предвосхитил ряд открытий, сделанных много веков спустя. Он заложил основу учения о волнах и рычаге; им были намечены основные принципы авиации. Свои научные открытия Леонардо использовал во множестве изобретений и при строительстве крупнейших зданий, каналов, военно-инженерных сооружений.

Первые марки, посвященные Леонардо да Винчи, вышли на его родине в Италии в 1932 г. Затем марки, посвященные Леонардо, выходили неоднократно. Вверху приведена марка, выпущенная в Италии в 1935 году. Она посвящена Международному салону аэронавтики в Милане; на ней изображен портрет Леонардо на фоне летящих самолетов — в честь его заслуг в вопросах исследования возможности полета человека.

Наибольшее количество марок, посвященных Леонардо да Винчи, вышло в 1952 году, когда отмечалось 500 лет со дня его рождения. На фото вы видите марки, выпущенные к этой дате в Италии, Венгрии, Польше, Румынии и ГДР (на марках Италии, Венгрии и Польши изображен автопортрет Леонардо да Винчи).

Современники гораздо больше ценят Леонардо да Винчи как художника. Мы помещаем марку, на которой воспроизведена одна из его картин («Мадонна Бенуа»), хранящаяся в Эрмитаже.

А. В. Алтыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Искусственные ядра»

Достаточна.

К статье «Тригонометрические функции»

1. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 2π; в) 4π; г) π (указание: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$); д) 2π; е) π.

2. б) Предположим, что T — период данной функции, то есть что $\cos(x+T)\times\cos[\sqrt{2}(x+T)] = \cos x\cos\sqrt{2}x$ при любом x. Подставив в это равенство $x=0$, получим: $\cos T\cos\sqrt{2}T = 1$. Последнее равенство может выполняться лишь в двух случаях: $\cos T = 1$, $\cos\sqrt{2}\,T = 1$ или $\cos T = -1$, $\cos\sqrt{2}\,T = -1$ (если предположить, что один из сомножителей по абсолютной величине меньше 1, тогда второй должен быть по абсолютной величине больше 1, чего быть не может). В первом случае $T = 2\pi k$, $T = \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}$, откуда, поделив первое равенство на второе, получим, что $\sqrt{2} = \frac{n}{k}$ (то есть, что $\sqrt{2}$ — рациональное число). Второй случай приводится к противоречию аналогично.

3. а) положительное (дуга длиной 2 кончается во II четверти); б) отрицательное; в) положительное; г) отрицательное $\left(3\pi < \pi^2 < 10 < \frac{7\pi}{2}\right)$; д) отрицательное.

4. Нет, не следует; рассмотреть случай $p=-5$, $q=6$.

7. а) Преобразуем:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\beta+\sin(2\alpha+\beta)}{-\sin\beta+\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{\sin\beta+5\sin\beta}{-\sin\beta+5\sin\beta} = \frac{6\sin\beta}{4\sin\beta} = \frac{3}{2}.$$

Заметим, что утверждение задачи верно лишь при $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$.

б) Имеем: $1+\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\operatorname{tg}\frac{x-a}{2} =$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}} = 2\cos a : \left[\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+a}{2}+\frac{x-a}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\cos a}{\cos x+\cos a} = \frac{2\cos a}{\cos a+\cos a\cos b} = \frac{2}{\cos b+1} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

9. а) Обозначив данное выражение через M, имеем при $\alpha \neq \pi k$:

$$M = \frac{2^n\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\ldots\cos 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha} = \frac{2^{n-1}\sin 2\alpha\cos 2\alpha\ldots\cos 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha} = \ldots = \frac{\cos 2^{n+1}\alpha}{2^n\sin\alpha}.$$

При $\alpha=\pi k$ имеем

$$M = \cos\pi k\cos 2\pi k\ldots\cos 2^n\pi k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=2p, \\ -1 & \text{при } k=2p+1. \end{cases}$$

б) Обозначив данное выражение через M, получим при $\alpha \neq \pi(2k+1)$:

$$2\cos\frac{\alpha}{2}M = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \cdots + 2(-1)^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}+\cos\frac{5\alpha}{2}+\cos\frac{7\alpha}{2}-\cdots+(-1)^{n+1}\cos\frac{2n-1}{2}\alpha+(-1)^{n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\alpha =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}+(-1)^{n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\alpha.$$

При $\alpha = \pi(2k+1)$

$M = \cos\pi(2k+1) - \cos 2\pi(2k+1) + \cos 3\pi(2k+1) - \ldots + (-1)^{n+1}\cos\pi n(2k+1) = -1-1-1- \ldots -1 = -n.$

в) Ответ:

$$M = \frac{(n+1)\sin n\alpha - n\sin(n+1)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

при $\alpha \neq 2k\pi$; $M=0$ при $\alpha = 2k\pi$.

г) По формуле синуса тройного угла имеем:

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3},$$

$$\sin\frac{\alpha}{3} = 3\sin\frac{\alpha}{3^2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{3^2} = 3\sin\frac{\alpha}{3^3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}} = 3\sin\frac{\alpha}{3^n} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^n},$$

откуда

$$\sin^3\frac{\alpha}{3} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{4}\sin\alpha,$$

$$\sin^3\frac{\alpha}{3^2} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3^2} - \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{3},$$

$$\sin^3\frac{\alpha}{3^3} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3^3} - \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{3^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin^3\frac{\alpha}{3^n} = \frac{3}{4}\sin\frac{\alpha}{3^n} - \frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}.$$

Умножая последние равенства соответственно на $1, 3, 3^2, \ldots 3^{n-1}$ и почленно складывая, получим, что искомое выражение равно $\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n} - \sin\alpha\right)$.

11. а) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x+y}{2}$;

б) $4\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) : \cos^3\alpha$;

в) $2\sin 3\alpha\sin 5\alpha\cos\alpha$;

12. а) $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$;

б) $\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$;

в) $\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$;

г) $-\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$;

д) 4.

13. а) $\frac{2-m}{m}$ при $m \neq 0$; при $m=0$ выражение не имеет смысла; в) 7; г) -2.

14. 3.

16. б) Данное неравенство равносильно такому: $\cos\alpha + 3(\cos 3\alpha + 4\cos^2 3\alpha) \geqslant -1{,}2$. Преобразуем:

$$\cos 3\alpha + 4\cos^2 3\alpha = \left(2\cos 3\alpha + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \geqslant -\frac{1}{16},$$ откуда получаем:

$$\cos\alpha + 3(\cos 3\alpha + 4\cos^2 3\alpha) \geqslant -1 - \frac{3}{16} > -1 - \frac{2}{10} = -1{,}2.$$

К «Вариантам вступительных экзаменов по математике 1971 года»

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Вариант 1

1. 1 : 2.

2. Так как

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}4x = \frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x},$$

$$\operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}3x = \frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x},$$

то исходное уравнение можно записать в виде $\sin 5x(\cos 2x\cos 3x + \cos x\cos 4x) = 0$ (предполагая, что $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x \neq 0$). Отсюда:

а) $\sin 5x = 0$; $x = \frac{\pi}{5}k$;

б) $\cos 2x\cos 3x + \cos x\cos 4x = 0.$ (1)

Используя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, преобразуем (1) к виду

$$\cos x(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1) = 0, \qquad (2)$$

и так как $\cos x \neq 0$, то из (2) находим $\cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$, откуда

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8} + \pi k.$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{5} k, \quad x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + \pi k,$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. Пусть Q, P, N — точки касания окружности со сторонами треугольника (рис. 1).

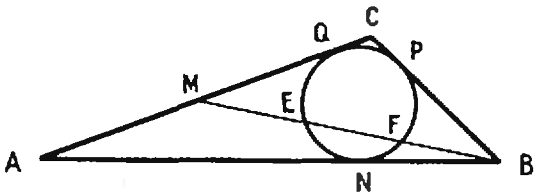


Рис. 1.

Введем следующие обозначения: $AB = c$; $BC = a$, $AC = b$, $BM = x$. Тогда, по условию, $ME = EF = FB = \frac{x}{3}$.

Из теоремы о касательной и секущей следует, что $NB = MQ = \frac{x\sqrt{2}}{3}$. Но так как $QC = CP$ и $NB = BP$, то

$$a = \frac{b}{2}. \tag{3}$$

Далее, так как $AQ = AN$, то

$$\frac{b}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{3} = c - \frac{x\sqrt{2}}{3}$$

или

$$c - \frac{b}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} x. \tag{4}$$

Но

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}. \tag{5}$$

(Эта формула следует из теоремы: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.) Подставляя значения x из (5) в (4), используя (3), получаем

$$20\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 36\,\frac{c}{b} + 13 = 0,$$

откуда находим

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2}; \ \frac{13}{10}.$$

В первом случае $a : b : c = 1 : 2 : 1$ — треугольник ABC вырождается в отрезок. Во втором случае $a : b : c = 5 : 10 : 13$.

Ответ: $BC = CA : AB = 5 : 10 : 13$.

4. Сложив первое и второе уравнение системы, получим

$$2x^2 - xy - xz = 0$$

или

$$x(2x - y - z) = 0.$$

а) $x = 0$. Подставив это значение x во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} x = 0, \\ z^2 = y^2 \\ z^3 - y^3 = y^2 + z^2. \end{cases} \tag{6}$$

Если $z = y$, то из третьего уравнения системы (6) следует $y = 0$. Получаем решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Если $z = -y$, то из третьего уравнения системы (6) находим два значения для y: $y = 0$ или $y = -1$. Это дает еще одно решение: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$.

б) $2x - y - z = 0$. (7)

Подставляя $z = 2x - y$ в первое уравнение исходной системы, находим $x = 0$ либо $x = y$.

При $x = 0$ из (7) следует $z = -y$, и мы приходим к рассмотренному выше случаю.

Если же $x = y$, то из (7) находим $z = x$; тогда из третьего уравнения исходной системы следует $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ответ: (0, 0, 0); (0, —1, 1).

5. Проведем через точку C плоскость π, перпендикулярную к ребру SC, и пусть E и F — точки пересечения с плоскостью π продолжений ребер SA и SB (рис. 2).

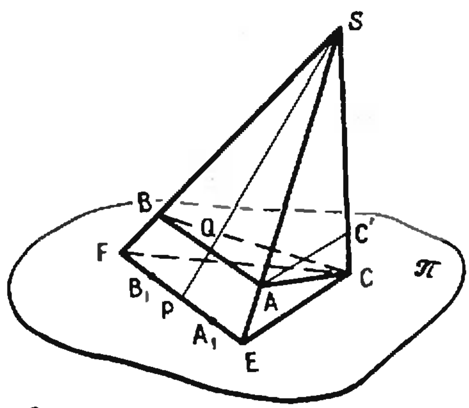


Рис. 2.

Так как $\angle ESC = \angle FSC$ (пирамида $SABC$ правильная), то $SE = SF$ и, следовательно, $FE \| AB$, то есть плоскость грани SAB пересекается с плоскостью π по прямой, параллельной AB. SC одновременно является боковым ребром правильной треугольной призмы, основание которой, треугольник A_1B_1C, лежит в плоскости π, а вершины A_1 и B_1 лежат в плоскости грани SAB. Таким образом, вершины A_1 и B_1 лежат на прямой EF.

Пусть точка P — середина отрезка EF; тогда PS пересекает AB в его середине — точке Q. Проведем $AC' \| EC$.

Из подобия треугольников SQA и SPE имеем

$$\frac{AQ}{PE}=\frac{SA}{SE}, \qquad (8)$$

а из подобия треугольников SAC' и SEC

$$\frac{SA}{SE}=\frac{AC'}{EC}. \qquad (9)$$

Так как $AC' \perp SC$, то $AC'<AC$, поэтому из (9) следует

$$\frac{SA}{SE}<\frac{AC}{EC}. \qquad (10)$$

Из (8) и (10) получим

$$\frac{AQ}{PE}<\frac{AC}{EC} \text{ или } \frac{AQ}{AC}<\frac{PE}{EC}. \qquad (11)$$

Треугольник ABC правильный, поэтому

$$\frac{AQ}{AC}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Тогда из (11) следует

$$\sin \measuredangle PCE=\frac{PE}{EC}>\frac{1}{2},$$

то есть $\measuredangle FCE$ больше 60°. Отсюда следует, что точки A_1 и B_1 лежат на отрезке EF, P — середина A_1B_1 и $A_1B_1<EF$.

Теперь нетрудно сделать рисунок (рис. 3). Сторона основания AB пирамиды $SABC$

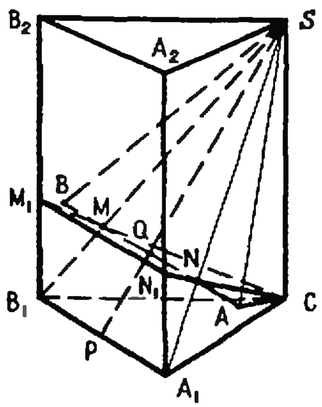


Рис. 3.

пересекается с гранями призмы A_1A_2SC и B_1B_2SC в точках M и N.

Обозначим $x=MN$, $a=AB$, $b=A_1B_1$, h — высота пирамиды. Найдем объемы пирамиды $SABC$ и ее части, лежащей внутри призмы:

$$V_{SABC}=\frac{1}{6}\,ah\cdot QC,$$

$$V_{SMNC}=\frac{1}{6}\,hx\cdot QC,$$

откуда

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SMNC}}=\frac{x}{a}. \qquad (12)$$

Из подобия треугольников MSN и B_1SA_1 находим

$$\frac{x}{b}=\frac{SQ}{SP}. \qquad (13)$$

Рассмотрим треугольник SPC (рис. 4). Проведем прямую $QL \parallel PC$. Из подобия тре-

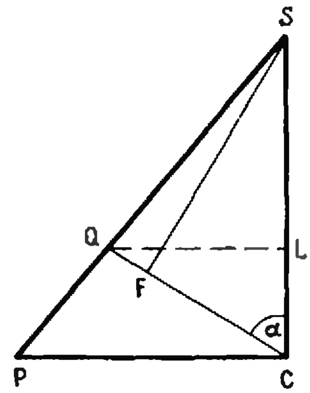


Рис. 4.

угольников SQL и SPC имеем

$$\frac{SQ}{SP}=\frac{QL}{PC}. \qquad (14)$$

Далее, PC — высота основания призмы, $PC=b\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $QL=QC\cdot\sin\alpha$.

Угол α — это угол между ребром SC и высотой QC основания правильной пирамиды. Если SF — высота пирамиды, то $FC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. По условию, $SC=\frac{2}{\sqrt{3}}\,a$, откуда $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=60^\circ$, и, следовательно,

$$QL=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ=\frac{3a}{4}.$$

Из (13) и (14) находим

$$\frac{x}{b}=\frac{SQ}{SP}=\frac{QL}{PC}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2b},$$

откуда $\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это, как следует из (12), дает искомое отношение объемов.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 2

1. 63. **2.** $x=\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k$,

$$x=-\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi k.$$

3. $\dfrac{S_1S_2(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2\left(S_2^2-S_1S_3\right)}$.

4. $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$; $(t, 4t, -2t)$. t — любое действительное число. 5. $\frac{3\sqrt{6}}{40}$.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ

Вариант 1

1. $x_1 = 1$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 1$. Указание. Ввести новые неизвестные: $u = \sqrt[3]{x}$, $v = \sqrt[3]{y}$. 2. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 4$.

3. $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, где $k = 2, 3, 4, \ldots$

4. $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3$.

5. Решение. Пусть $x \leqslant 0$; тогда данный многочлен положителен, поскольку $x^8 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, $-x^5 \geqslant 0$, $-x \geqslant 0$. Пусть $0 < x < 1$; тогда данный многочлен представим в виде $x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x)$, откуда видно, что он положителен, поскольку $x^3 > 0$, $x^2 > 0$, $1 - x^3 > 0$, $1 - x > 0$. Пусть $x \geqslant 1$; тогда данный многочлен представим в виде $x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1$, откуда видно, что он положителен, поскольку $x^5 \geqslant 0$, $x^3 - 1 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $x - 1 \geqslant 0$.

Вариант 2

1. $x_1 = 7$, $y_1 = 3$; $x_2 = -7$, $y_2 = -3$.
2. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{2}{11} l\pi$ при $k = 0, -1$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

4. $\frac{1}{2} \left| \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C \right|$.

МОСКОВСКИЙ ОБЛАСТНОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени Н. К. КРУПСКОЙ

Математический факультет

Вариант 1

1. $S = \frac{2\pi H^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$; $V = \pi H^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

2. $x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $x_2 = \pm\operatorname{arctg} 5 + 2\pi n$, где k и n — любые целые числа.
3. $-2 < x < 2$.
4. $x_1 = y_1 = 1$; $x_2 = y_2 = -1$. Указание. Представить левую часть в виде $x^4 + y^4 + 1 + 1$ и использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим четырех чисел.

Вариант 2

1. $S = \frac{2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

2. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где k — любое целое число. 3. $x < -7$ 4. $m_1 = 3$; $m_2 = 4$.

Физический факультет

1. $S = \frac{\pi a^2}{\cos \alpha}$. 2. $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, где k и n — любые целые числа. 3. $-5\,ab$; -20. 4. $x < -3$, $x \geqslant \frac{3}{2}$.

К статье «Законы идеальных газов»

1. 751,2 *мм рт. ст.*
2. 1—2 — давление уменьшается; 2—3 — давление увеличивается; 3—1 — давление увеличивается.
3. Разность уровней ртути в коленах трубки не изменится.
4. $x_3 = 0{,}3$ *м*.
6. 5 *г* водорода, 8 *г* гелия.

К заметке «Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 4, 3-я стр. обл.)

1. а=1, г=5, д=3, е=2, к=8, м=6, с=7, ф=9.

2. Все выключатели нужно соединить последовательно с лампочкой, затем эту цепочку подключить к источнику. Первый, второй и пятый выключатели должны быть в «нормальном» положении разомкнутым и замыкаться при нажатии соответствующих кнопок; остальные выключатели в «нормальном» положении должны быть замкнутыми и при нажатии соответствующих кнопок должны «размыкаться».

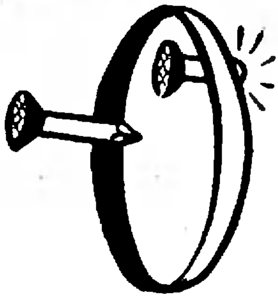
3. Начиная с вершины: 6, 1, 4, 5, 2, 3.

4. Вода действительно холоднее окружающего воздуха, но когда человек выходит из реки, капли воды на теле начинают испаряться, отбирая часть тепла от тела. Тело охлаждается, и поэтому воздух кажется холоднее воды

5. Число, стоящее в каждой клетке начиная с третьей, равно числу, стоящему на 2 клетки раньше, плюс один.

6. Можно предложить несколько способов. Вот один из них: уравновесить на весах сосуд, доверху заполненный водой, затем снять сосуд, положить в него камень (при этом выльется часть воды) и вновь поставить на весы. Для того, чтобы вновь уравновесить весы, на другую чашку нужно будет положить гирю весом $P_1 = (\rho_к - \rho_в) gV$ ($\rho_к$ — плотность камня, $\rho_в$ — плотность воды, V — объем камня). Затем вытащить камень и вновь взвесить сосуд. От веса сосуда с водой он будет отличаться на $P_2 = \rho_в g V$. Отсюда $V = \frac{P_2}{\rho_в g}$. Поэтому $P_1 = (\rho_к - \rho_в) g \frac{P_2}{\rho_в g} = \frac{\rho_к}{\rho_в} P_2 - P_2$. Или $\rho_к = \rho_в \frac{P_1 + P_2}{P_2}$.

КВАНТ
ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

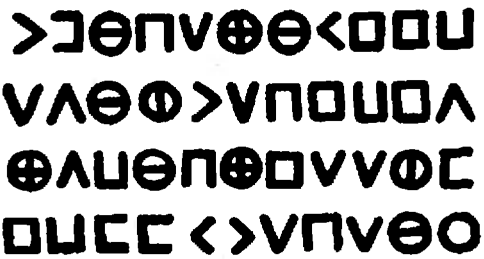


1. К стене прислонен обруч. В одной точке в стене «внутри» обруча вбит гвоздь так, что обруч касается его. Найти геометрическое место точек, в которые надо вбить второй гвоздь внутри обруча, чтобы обруч оставался неподвижным.

2. В предлагаемой шифровке значками зашифрованы цифры и знаки +, —, =. Каждая строчка шифровки содержит запись одного из арифметических действий типа:

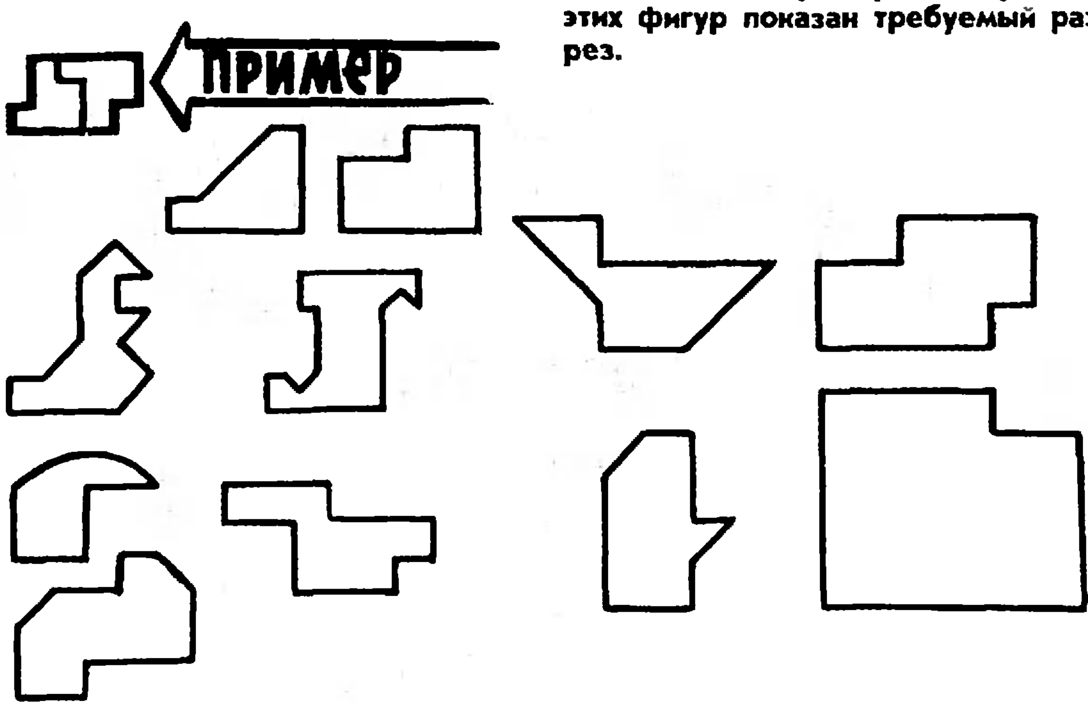
$25+184=209$ или $2568=2573-5$.

Попробуйте определить, какой цифре или знаку соответствует каждый из значков.



3. Каждую из приведенных фигур, попробуйте разрезать на две равные фигуры, то есть на две такие фигуры, которые можно совместить, наложив одну на другую.

В качестве примера на первой из этих фигур показан требуемый разрез.



ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 5

К нашим читателям!

Продолжается подписка на второе полугодие 1972 года на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Постоянно помещаются рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке и в розничную продажу не поступает.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.